MATEMAATIKA KÄSIRAAMAT

E. Jürimäe K. Velsker

MATEMAATIKA KÄSIRAAMAT

E. JÜRIMÄE K. VELSKER

KOOLI-MATEMAATIKA KÄSIRAAMAT

TALLINN «VALGUS» 1980

51
J96

Kaane kujundanud I. Pääsuke

Jürimäe, E., Velsker, K.
J96 Koolimatemaatika käsiraamat
Tallinn: Valgus, 1979. — 440 lk., 397 joonist.

Käsiraamat sisaldab koolimatemaatika mõisteid, definitsioone, omadusi, reegleid, juhiseid, eeskirju, seadusi. Näited ja näiteülesanded aitavad selgitada vastava küsimuse olemust ning praktilisi rakendusi. Silmas pidades matemaatika süvendatud õppega klasside ja fakultatiivkursuste vajadusi on koolimatemaatika raame kohati veidi ületatud.

Raamat on mõeldud kasutamiseks IV—XI kl. õpilastele, matemaatikaõpetajatele ja üliõpilaskandidaatidele.

1702010000
J $\frac{60601-144}{M902(16)-80}$ 29—79 22.1

© Kirjastus «Valgus», 1980

SISUKORD

Autoritelt — 15
Matemaatilised sümbolid — 17
Kreeka tähestik — 22

1. **Hulgad** — 23

1.1. Võrdus — 23
1.2. Loogika sümbolid — 23
1.3. Hulk ja osahulk — 24
1.3.1. Hulk — 24
1.3.2. Osahulk — 25
1.4. Tehted hulkadega — 26
1.4.1. Hulkade ühend ehk summa — 26
1.4.2. Hulkade ühisosa ehk korrutis — 27
1.4.3. Hulkade vahe — 27
1.4.4. Hulga täiend — 28
1.4.5. Hulkade ristkorrutis — 28
1.5. Hulkade ekvivalentsus ja võimsus — 29
1.5.1. Hulkade ekvivalentsus — 29
1.5.2. Hulga võimsus — 29
1.6. Kujutused — 30
1.6.1. Kujutis ja originaal — 31
1.6.2. Jada — 31
1.6.3. Üksühene kujutus — 32

2. **Seosed. Struktuurid** — 33

2.1. Seosed ehk relatsioonid — 33
2.1.1. Seos kahe hulga vahel — 33
2.1.2. Funktsionaalne seos — 33
2.1.3. Seos antud hulgas — 34
2.1.4. Ekvivalentsiseos — 34
2.1.5. Järjestusseos — 34
2.2. Struktuur — 35
2.3. Algebralised struktuurid — 35
2.3.1. Algebraline operatsioon ehk tehe — 35
2.3.2. Poolrühm — 36
2.3.3. Rühm — 36
2.3.4. Ring — 37
2.3.5. Korpus — 38
2.4. Funktsiooni mõiste — 38
2.4.1. Muutuja ehk muutuv suurus — 38
2.4.2. Funktsiooni definitsioon — 39
2.4.3. Funktsiooni graafik — 39
2.4.4. Funktsiooni esitusviisid — 40
2.4.5. Tehted funktsioonidega — 42

2.4.6. Liitfunktsioon — 43
2.4.7. Pöördfunktsioon — 43
2.4.8. Ajaloost — 44

3. Arvuhulgad — 45

3.1. Arvu mõiste ja sümbolid — 45
3.1.1. Arvu mõiste ja tema areng — 45
3.1.2. Positsioonilised arvusüsteemid — 45
3.1.3. Rooma numbrid — 47
3.2. Arvutusoperatsioonid — 47
3.2.1. Aritmeetilised tehted — 47
3.2.2. Arvutusseadused — 47
3.2.3. Tehete järjekord arvutamisel — 48
3.3. Naturaalarvud — 49
3.3.1. Naturaalarvu mõiste ja omadused — 49
3.3.2. Jäägiga jagamine — 49
3.3.3. Alg- ja kordarvud — 50
3.3.4. Arvude jaguvuse tunnused — 50
3.3.5. Kordarvu lahutamine algtegureiks — 51
3.3.6. Arvude suurim ühistegur — 51
3.3.7. Arvude vähim ühiskordne — 52
3.4. Täisarvud — 53
3.4.1. Täisarvu mõiste — 53
3.4.2. Täisarvude hulga omadusi — 54
3.5. Ratsionaalarvud — 54
3.5.1. Ratsionaalarvu mõiste — 54
3.5.2. Tehted negatiivsete ja erimärgiliste arvudega — 55
3.5.3. Ratsionaalarvude esitamine kümnendmurdudena — 55
3.5.4. Positiivsete murdude võrdlemine — 56
3.5.5. Ratsionaalarvude hulga omadusi — 57
3.6. Reaalarvud — 57
3.6.1. Reaalarvu mõiste — 57
3.6.2. Reaalarvu absoluutväärtus — 58
3.6.3. Reaalarvude hulga pidevus — 58
3.6.4. Tähtsamaid reaalarvude hulki — 59
3.6.5. Reaalarvu ümbrus — 59
3.6.6. Reaalarvude hulga omadusi — 60
3.7. Kompleksarvud — 60
3.7.1. Kompleksarvu mõiste — 60
3.7.2. Tehted kompleksarvudega — 62
3.7.3. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju — 63
3.8. Arvu mõiste ajaloolisest arengust — 65

4. Piirväärtus ja pidevus — 66

4.1. Jada piirväärtus — 66
4.1.1. Jada piirväärtuse definitsioon — 66
4.1.2. Jada piirväärtuse omadusi — 67
4.2. Funktsiooni piirväärtus — 69
4.2.1. Funktsiooni piirväärtuse definitsioon — 69
4.2.2. Funktsiooni ühepoolne piirväärtus — 70
4.2.3. Funktsiooni piirväärtus lõpmatuspunktis — 71
4.2.4. Funktsiooni piirväärtuse omadusi — 72

4.2.5. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine — 74
4.2.6. Lõpmatu piirväärtus — 74
4.3. Mõningaid olulisi piirväärtusi — 75
4.4. Määramatused — 76
4.4.1. Määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$ — 76
4.4.2. Määramatus tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$ — 76
4.4.3. L'Hospitali reegel — 76
4.4.4. Määramatus tüüpi $0 \cdot \infty$ — 77
4.4.5. Määramatus tüüpi $\infty - \infty$ — 78
4.4.6. Määramatused tüüpi 0^0, ∞^0 ja 1^∞ — 78
4.5. Funktsiooni pidevus — 79
4.5.1. Funktsiooni pidevuse definitsioon — 79
4.5.2. Funktsiooni ühepoolne pidevus — 81
4.5.3. Funktsiooni katkevuspunktid — 82
4.6. Pidevate funktsioonide omadusi — 84
4.6.1. Aritmeetiliste tehetega seotud omadusi — 84
4.6.2. Liit- ja pöördfunktsiooni pidevus — 84
4.6.3. Lõigus pidevate funktsioonide omadusi — 84
4.7. Piirväärtuse mõiste ajaloost — 86

5. Aritmeetika ja elementaaralgebra — 87

5.1. Tehted murdudega — 87
5.1.1. Murru mõiste — 87
5.1.2. Tehted murdudega — 87
5.2. Ligikaudsed arvud — 90
5.2.1. Arvude ümardamine — 90
5.2.2. Ligikaudse arvu viga ja vea ülemmäär — 90
5.2.3. Relatiivne ehk suhteline viga — 91
5.2.4. Ligikaudsete arvude kirjutamine — 91
5.2.5. Arvutamine ligikaudsete arvudega — 92
5.3. Protsendid — 93
5.3.1. Protsent — 93
5.3.2. Protsentarvutuse kolm põhiülesannet — 93
5.4. Võrre ja tema omadused — 94
5.4.1. Võrre — 94
5.4.2. Võrde omadusi — 95
5.4.3. Võrdeline jaotamine — 96
5.5. Üks- ja hulkliikmed — 97
5.5.1. Algebraline avaldis — 97
5.5.2. Üksliikmed — 97
5.5.3. Tehted üksliikmetega — 98
5.5.4. Üksliikmete suurim ühistegur ja vähim ühiskordne — 99
5.5.5. Hulkliikmed ja tehted nendega — 99
5.5.6. Algebralised murrud — 100
5.5.7. Polünoomid — 100
5.5.8. Abivalemid — 102
5.5.9. Hulkliikme tegureiks lahutamine — 103
5.5.10. Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks — 103
5.6. Astmed ja juured — 104
5.6.1. Astme mõiste — 104
5.6.2. Tehted astmetega — 105

5.6.3. Juure mõiste — 106
5.6.4. Tehted juurtega — 107
5.7. Logaritmid — 109
5.7.1. Logaritm ja tema omadused — 109
5.7.2. Kümnendlogaritmid — 110
5.7.3. Avaldiste logaritmimine ja potentseerimine — 111
5.8. Keskmised — 112
5.8.1. Aritmeetiline keskmine — 112
5.8.2. Geomeetriline keskmine — 112
5.9. Aritmeetiline ja geomeetriline jada — 113
5.9.1. Aritmeetiline jada — 113
5.9.2. Geomeetriline jada — 114
5.9.3. Lõpmatult kahanev geomeetriline jada — 114
5.10. Determinandid — 115
5.10.1. Teist järku determinant — 115
5.10.2. Kolmandat järku determinant — 116
5.10.3. Determinantide omadusi — 117

6. Võrrandid ja võrrandisüsteemid — 118

6.1. Võrrand. Võrrandi lahendamine — 118
6.1.1. Võrrandi mõiste — 118
6.1.2. Samaväärsed võrrandid — 118
6.1.3. Võrrandi lahendamine — 120
6.1.4. Võrrandite liigitamine — 122
6.2. Lineaarvõrrand — 123
6.3. Ruutvõrrand — 124
6.3.1. Ruutvõrrand — 124
6.3.2. Ruutvõrrandi erikujusid — 124
6.3.3. Ruutvõrrandi lahendite omadused (Viete'i teoreem) — 125
6.3.4. Ruutvõrrandi abil lahenduvaid võrrandeid — 125
6.4. Kuupvõrrand — 126
6.5. Kõrgema astme võrrand — 127
6.5.1. Kõrgema astme võrrand — 127
6.5.2. Lauseid algebralise võrrandi kohta — 127
6.5.3. Kaheliikmeline võrrand — 129
6.6. Murdvõrrand — 129
6.7. Juurvõrrand — 130
6.7.1. Juurvõrrand — 130
6.7.2. Näiteid juurvõrrandite lahendamisest — 130
6.8. Eksponentvõrrand — 131
6.9. Logaritmvõrrand — 133
6.10. Trigonomeetrilised võrrandid — 134
6.10.1. Trigonomeetriline võrrand — 134
6.10.2. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamine — 134
6.11. Võrrandi graafiline lahendamine — 137
6.12. Lineaarvõrrandisüsteem — 138
6.12.1. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteem — 138
6.12.2. Kolme muutujaga lineaarvõrrandisüsteem — 140
6.13. Võrrandisüsteemi graafiline lahendamine — 142

7. Võrratused ja võrratusesüsteemid — 144

7.1. Üldisi mõisteid seoses võrratustega — 144
7.1.1. Võrratuse mõiste — 144
7.1.2. Võrratuste üldisi omadusi — 144
7.1.3. Võrratuse ja võrratusesüsteemi lahend — 145
7.1.4. Üldised printsiibid ja reeglid võrratuste lahendamisel 146
7.2. Ühe muutujaga võrratused ja võrratusesüsteemid — 147
7.2.1. Lineaarvõrratused — 147
7.2.2. Ruutvõrratused — 148
7.2.3. Kõrgema astme võrratused — 150
7.2.4. Murdvõrratused — 152
7.2.5. Absoluutväärtust sisaldavad võrratused — 154
7.2.6. Näiteid muud tüüpi võrratustest — 155
7.3. Kahe muutujaga võrratused ja võrratusesüsteemid — 156
7.3.1. Kahe muutujaga lineaarvõrratus — 156
7.3.2. Kahe muutujaga lineaarvõrratusesüsteemid — 157
7.3.3. Lineaarne planeerimisülesanne — 159

8. Kombinatoorika ja tõenäosusteooria — 162

8.1. Kombinatoorika — 162
8.1.1. Kombinatoorika — 162
8.1.2. Faktoriaal — 162
8.1.3. Variatsioonid — 163
8.1.4. Permutatsioonid — 163
8.1.5. Kombinatsioonid — 164
8.1.6. Liitmise ja korrutamise reegel — 165
8.1.7. Newtoni binoomvalem — 165
8.2. Tõenäosusteooria — 166
8.2.1. Tõenäosusteooria — 166
8.2.2. Sündmus — 167
8.2.3. Sündmuse suhteline sagedus — 169
8.2.4. Statistiline tõenäosus — 170
8.2.5. Klassikaline tõenäosus — 170
8.2.6. Juhuslik muutuja — 172

9. Geomeetria — 173

9.1. Geomeetria — 173
9.1.1. Geomeetria — 173
9.1.2. Geomeetriline kujund — 173
9.1.3. Sirge — 173
9.1.4. Tasand — 174
9.1.5. Poolruum — 176
9.2. Definitsioon ja teoreem — 176
9.2.1. Definitsioon — 176
9.2.2. Teoreem — 178
9.3. Aksiomaatiline meetod — 178
9.4. Geomeetria aksiomatiseerimisest — 180
9.4.1. Geomeetria aksiomatiseerimisest — 180
9.4.2. H. Weyli aksiomaatika — 180

9.4.3. H. Weyli aksiomaatika alusel loodud aksiomaatika — 182
9.4.4. A. Kolmogorovi aksiomaatika — 183
9.5. Geomeetria ajaloost — 184

10. Planimeetria — 186

10.1. Planimeetria — 186
10.2. Punkt ja sirge tasandil — 186
10.3. Lõik — 187
10.3.1. Lõik — 187
10.3.2. Lõikude võrdlemine — 187
10.3.3. Tehted lõikudega — 188
10.3.4. Lõigu keskpunkt — 190
10.3.5. Lõikude suhe — 190
10.4. Sümmeetria — 191
10.4.1. Teljeline sümmeetria — 191
10.4.2. Tsentraalsümmeetria — 193
10.5. Nurgad ja paralleelsed sirged — 195
10.5.1. Nurga mõiste — 195
10.5.2. Nurga mõõtmine — 197
10.5.3. Nurkade liigitamine — 198
10.5.4. Nurkade võrdlemine ja tehted nurkadega — 200
10.5.5. Nurgapoolitaja — 203
10.5.6. Kesknurk — 203
10.5.7. Piirdenurk — 205
10.5.8. Nurk, mille tipp asetseb seespool ringjoont — 205
10.5.9. Nurk, mille tipp asetseb väljaspool ringjoont — 205
10.5.10. Kõrvunurgad — 205
10.5.11 Tippnurgad — 206
10.5.12. Kahe sirge lõikamine kolmanda sirgega — 206
10.5.13. Paralleelsed sirged — 206
10.5.14. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad — 208
10.5.15. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad — 209
10.5.16. Kiirteteoreem — 210
10.5.17. Kuldlõige — 211
10.6. Hulknurk — 212
10.6.1. Murdjoon — 212
10.6.2. Hulknurk — 214
10.6.3. Hulknurkade sarnasus — 216
10.6.4. Korrapärane hulknurk — 217
10.6.5. Näiteid korrapärastest hulknurkadest — 220
10.7. Kolmnurk — 220
10.7.1. Kolmnurk — 220
10.7.2. Kolmnurkade liigitamine — 221
10.7.3. Kolmnurga omadusi — 223
10.7.4. Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas — 223
10.7.5. Meetrilisi seoseid kolmnurgas — 226
10.7.6. Kolmnurga lõikude ning nurkade vahelisi seoseid — 228
10.7.7. Kolmnurga pindala — 232
10.7.8. Kolmnurga lahendamine — 232

10.7.9. Kolmnurkade kongruentsus — 235
10.7.10. Kolmnurkade sarnasus — 237
10.7.11. Võrdhaarne kolmnurk — 239
10.7.12. Võrdkülgne kolmnurk — 239
10.7.13. Täisnurkne kolmnurk — 240
10.8. Rööpkülik — 243
10.9. Ristkülik — 245
10.10. Romb — 245
10.11. Ruut — 246
10.12. Trapets — 247
10.13. Ringjoon — 248
10.13.1. Ringjoone mõiste — 248
10.13.2. Ringjoone kaar — 249
10.13.3. Ringjoone lõikaja ja puutuja — 250
10.13.4. Kõõlhulknurk ja puutujahulknurk — 252
10.13.5. Ringjoone pikkus. Arv π — 253
10.13.6. Ringjoone sirgestamine — 254
10.14. Ring — 254
10.14.1. Ringi mõiste — 254
10.14.2. Ringi sektor — 255
10.14.3. Segment — 255
10.14.4. Ringi pindala — 256
10.14.5. Ringi ruutimine — 256
10.15. Teisendused — 256
10.15.1. Teisendus tasandil — 256
10.15.2. Lüke tasandil — 257
10.15.3. Pööre tasandil — 258
10.15.4. Peegeldus tasandil — 259
10.15.5. Liikumine tasandil — 261
10.15.6. Homoteetsus — 262
10.15.7. Tasandi kokkusurumine ja väljavenitamine sirge suhtes — 264
10.15.8. Afiinsed teisendused — 264

11. Stereomeetria — 265

11.1. Stereomeetria — 265
11.2. Sirge ruumis — 265
11.2.1. Sirge — 265
11.2.2. Kahe sirge vastastikused asendid ruumis — 265
11.3. Tasand — 267
11.3.1. Tasand — 267
11.3.2. Tasandite vastastikused asendid — 268
11.4. Sirge ja tasandi vastastikune asend — 270
11.4.1. Sirge ja tasandi vastastikused asendid — 270
11.4.2. Sirge asetsemine tasandil — 270
11.4.3. Sirge ja tasandi paralleelsus — 270
11.4.4. Sirge ja tasandi lõikumine — 270
11.5. Paralleelprojektsioon — 272
11.5.1. Paralleelprojektsiooni mõiste — 272
11.5.2. Paralleelprojektsiooni omadusi — 273
11.6. Kahetahuline nurk — 275
11.6.1. Kahetahuline nurk — 275
11.6.2. Kahetahulise nurga joonnurk — 275
11.6.3. Kahe lõikuva tasandi vaheline nurk — 276
11.7. Hulknurgad ja pöördkehad — 277

11.7.1. Hulktahukas — 277
11.7.2. Pöördkeha — 278
11.7.3. Guldini lause — 279
11.8. Cavalieri printsiip — 280
11.9. Prisma — 280
11.9.1. Prisma — 281
11.9.2. Prismade liigitamine — 281
11.9.3. Prisma pindala — 282
11.9.4. Prisma ruumala — 282
11.10. Rööptahukas — 283
11.11. Risttahukas — 284
11.12. Kuup — 284
11.13. Püramiid — 285
11.13.1. Püramiid — 285
11.13.2. Püramiidide liigitamine — 285
11.13.3. Lauseid püramiidi kohta — 286
11.13.4. Püramiidi pindala — 287
11.13.5. Püramiidi ruumala — 288
11.14. Tüvipüramiid — 288
11.15. Mitmetahuline nurk — 289
11.15.1. Püramiidiline pind — 289
11.15.2. Mitmetahuline nurk — 289
11.16. Regulaarne hulktahukas — 291
11.16.1. Regulaarne hulktahukas — 291
11.16.2. Regulaarne tetraeeder — 291
11.16.3. Regulaarne heksaeeder — 291
11.16.4. Regulaarne oktaeeder — 292
11.16.5. Regulaarne dodekaeeder — 293
11.16.6. Regulaarne ikosaeeder — 293
11.17. Silinder — 293
11.17.1. Silindriline pind — 293
11.17.2. Silinder — 293
11.18. Koonus — 295
11.18.1. Kooniline pind — 295
11.18.2. Koonus — 295
11.19. Tüvikoonus — 297
11.20. Kera — 298
11.20.1. Kera — 298
11.20.2. Kera segment — 299
11.20.3. Kera kiht — 300
11.20.4 Kera sektor — 300
11.21. Sfäär — 301
11.21.1. Sfäär — 301
11.21.2. Sfääri segment — 302
11.21.3. Kera vöö — 302
11.22. Ruuminurk — 302
11.23. Lihtsamad teisendused ruumis — 303

12. Trigonomeetria — 305

12.1. Trigonomeetria — 305
12.2. Teravnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens — 305
12.2.1. Definitsioonid — 305

12.2.2. Mõningate nurkade siinus, koosinus, tangens ja kootangens — 306
12.2.3. Täiendusnurga valemid — 307
12.3. Mistahes nurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens — 307
12.3.1. Nurga mõiste — 307
12.3.2. Mistahes nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi definitsioonid — 307
12.4. Nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi märgi sõltuvus nurga veerandist — 309
12.5. Seosed ühe ja sama nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi vahel — 309
12.5.1. Trigonomeetria põhivalemid ja nende järeldused — 309
12.5.2. Nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi avaldamine ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide kaudu — 310
12.6. Taandamisvalemid — 310
12.7. Kahe nurga summa ja vahe siinus, koosinus, tangens ja kootangens — 312
12.8. Kordse nurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens — 312
12.9. Poolnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens — 312
12.10. Nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi avaldamine poolnurga tangensi kaudu — 313
12.11. Siinuste, koosinuste, tangensite ja kootangensite summa ning vahe teisendamine korrutiseks — 313
12.12. Trigonomeetriliste funktsioonide korrutise teisendamise valemid — 314

13. Vektoralgebra — 316

13.1. Vektorid — 316
13.1.1. Skalaarsed ja vektoriaalsed suurused — 316
13.1.2. Vektori mõiste — 316
13.1.3. Vektorite liitmine — 317
13.1.4. Vektorite lahutamine — 319
13.1.5. Vektori korrutamine arvuga — 319
13.1.6. Vektori lahutamine komponentideks — 320
13.1.7. Vektorite skalaarkorrutis — 322
13.1.8. Vektorite vektorkorrutis — 323
13.1.9. Vektorite segakorrutis — 325
13.2. Vektori koordinaadid — 326
13.2.1. Tasandi vektori koordinaadid — 326
13.2.2. Ruumi vektori koordinaadid — 327
13.2.3. Vektorite liitmine, lahutamine ja arvuga korrutamine koordinaatides — 329
13.2.4. Vektorite skalaarkorrutis koordinaatides — 330
13.2.5. Vektorite vektorkorrutis koordinaatides — 331
13.2.6. Vektorite segakorrutis koordinaatides — 333
13.3. Üldist vektoritest — 333
13.3.1. Ajaloost — 333
13.3.2. Vektoralgebra — 334
13.3.3. Vektorruum — 334

14. Analüütiline geomeetria — 336

14.1. Koordinaatide meetod — 336
14.1.1. Punkti koordinaat sirgel — 336
14.1.2. Koordinaadid tasandil — 336
14.1.3. Koordinaadid ruumis — 338
14.2. Analüütiline geomeetria tasandil — 338
14.2.1. Lõigu pikkus ja keskpunkt — 338
14.2.2. Joone võrrand — 339
14.2.3. Sirge võrrand — 340
14.2.4. Sirgete geomeetria — 342
14.2.5. Ringjoone võrrand — 342
14.2.6. Parabooli võrrand — 343
14.2.7. Ellipsi võrrand — 344
14.2.8. Hüperbooli võrrand — 345
14.2.9. Teist järku jooned — 348
14.3. Analüütiline geomeetria ruumis — 348
14.3.1. Lõigu pikkus ja keskpunkt — 348
14.3.2. Pinna võrrand — 348
14.3.3. Tasandid ruumis — 348
14.3.4. Sirged ruumis — 351
14.3.5. Tasandid ja sirged — 353
14.3.6. Sfääri võrrand — 354

15. Elementaarfunktsioonid — 355

15.1. Üldised mõisted — 355
15.1.1. Paarisfunktsioonid — 355
15.1.2. Paaritud funktsioonid — 355
15.1.3. Perioodilised funktsioonid — 356
15.1.4. Tõkestatud funktsioonid — 357
15.1.5. Monotoonsed funktsioonid — 359
15.2. Lineaarfunktsioon — 360
15.2.1. Lineaarfunktsioon ja tema graafik — 360
15.2.2. Võrdeline sõltuvus — 361
15.3. Astmefunktsioonid — 361
15.3.1. Ruutfunktsioon $y=x^2$ — 361
15.3.2. Kuupfunktsioon $y=x^3$ — 363
15.3.3. Funktsioonid $y=x^{2n}$ — 365
15.3.4. Funktsioonid $y=x^{2n+1}$ — 365
15.4. Juurfunktsioonid — 366
15.4.1. Funktsioon $y=\sqrt{x}$ — 366
15.4.2. Funktsioon $y=\sqrt[3]{x}$ — 367
15.4.3. Funktsioon $y=\sqrt[4]{x}$ — 368
15.4.4. Funktsioon $y=\sqrt[5]{x}$ — 369
15.5. Eksponentfunktsioonid — 369
15.5.1. Funktsioon $y=a^x\,(a>1)$ — 369
15.5.2. Funktsioon $y=a^x\,(0<a<1)$ — 370
15.6. Logaritmfunktsioonid — 371
15.6.1. Funktsioon $y=\log_a x\,(a>1)$ — 371
15.6.2. Funktsioon $y=\log_a x\,(0<a<1)$ — 372
15.7. Trigonomeetrilised funktsioonid — 373
15.7.1. Siinusfunktsioon $y=\sin x$ — 373
15.7.2. Koosinusfunktsioon $y=\cos x$ — 374

15.7.3. Tangensfunktsioon $y=\tan x$ — 375
15.7.4. Kootangensfunktsioon $y=\cot x$ — 376
15.8. Arkusfunktsioonid — 377
15.8.1. Funktsioon $y=\arcsin x$ — 378
15.8.2. Funktsioon $y=\arccos x$ — 379
15.8.3. Funktsioon $y=\arctan x$ — 379
15.8.4. Funktsioon $y=\operatorname{arccot} x$ — 380
15.8.5. Seoseid arkusfunktsioonide väärtuste vahel — 381
15.9. Elementaarfunktsioonid — 382
15.9.1. Elementaarfunktsiooni mõiste — 382
15.9.2. Määramispiirkonna leidmine — 383
15.10. Polünoomid — 384
15.10.1. Ruutpolünoom $y=ax^2+bx+c$ — 384
15.10.2. Kuuppolünoom $y=ax^3+bx^2+cx+d$ — 385
15.11. Astmefunktsioonid mittenaturaalarvuliste astendajatega — 386
15.11.1. Pöördvõrdeline sõltuvus — 386
15.11.2. Funktsioonid $y=x^\alpha\,(\alpha<0)$ — 388
15.11.3. Funktsioonid $y=x^\alpha\,(\alpha>0)$ — 390

16. Tuletis ja integraal — 392

16.1. Funktsiooni diferentseerimine — 392
16.1.1. Funktsiooni tuletis — 392
16.1.2. Aritmeetiliste tehetega seotud diferentseerimise reeglid — 393
16.1.3. Liitfunktsiooni tuletis — 393
16.1.4. Pöördfunktsiooni tuletis — 394
16.1.5. Tuletiste tabel — 394
16.1.6. Funktsiooni diferentsiaal — 395
16.1.7. Diferentsiaali rakendus vigade hindamisel — 396
16.1.8. Kõrgemat järku tuletised — 397
16.1.9. Ilmutamata funktsiooni tuletis — 398
16.1.10. Joone puutuja võrrand — 399
16.1.11. Joone normaali võrrand — 399
16.1.12. Ajaloost — 400
16.2. Tuletise mõiste rakendusi funktsionaalse seose iseloomustamisel — 400
16.2.1. Funktsiooni monotoonsus — 400
16.2.2. Lokaalsed ekstreemumid — 401
16.2.3. Funktsiooni kumerus ja nõgusus — 404
16.2.4. Käänupunktid — 405
16.3. Määramata integraal — 406
16.3.1. Algfunktsioon — 406
16.3.2. Määramata integraal — 407
16.3.3. Integreerimise põhivalemid — 407
16.3.4. Integreerimisreeglid — 408
16.4. Määratud integraal ja tema rakendusi — 409
16.4.1. Määratud integraali definitsioon — 409
16.4.2. Määratud integraali omadusi — 411
16.4.3. Määratud integraali arvutamine — 412
16.4.4. Määratud integraali ligikaudne arvutamine — 413
16.4.5. Tasandilise kujundi pindala arvutamine — 414
16.4.6. Joone kaare pikkuse arvutamine — 416

16.4.7. Keha ruumala arvutamine — 417
16.4.8. Pöördpinna pindala arvutamine — 419
16.4.9. Ajaloost — 420

17. Tabelid — 421

18. Mõõtühikud — 425

18.1. SI-süsteem — 425
18.2. Mittesüsteemilised mõõdud — 426
Register — 429

AUTORITELT

1. Teatmiku olemus. Käesolevasse teatmikku on püütud haarata koolimatemaatika mõisted, definitsioonid, omadused, reeglid, juhised, eeskirjad ja seadused. On esitatud näiteid ja näiteülesandeid, mis aitavad selgitada vastava küsimuse olemust. Kohati on koolimatemaatika raame ka veidi ületatud. Seda eeskätt seal, kus laiendamine on loomulik, või siis kohtades, kus koolimatemaatikas jäädakse vaid mõiste tasemele (näiteks teist järku jooned, pidevus jm.). Teatmik on mõeldud eelkõige õpilastele, kuid on lähtutud ka õpetajate vajadustest.

2. Teatmiku ja õpiku vahekord. Käesoleva teatmiku järgi pole võimalik matemaatikat õppida, küll aga meelde tuletada ja täpsustada ununenud fakti, eeskirja jne. ning samuti teada saada mõningaid seni tundmatuid matemaatilisi tõdesid. Käsiraamatus ei ole esitatud seoseid üksikute tõdede ja faktide vahel. Kuna koolimatemaatika õpikud arenevad ja muutuvad veelgi, siis võib juhtuda, et mõni teatmikus esitatud fakt või omadus pole sama sõnastusega nagu õpikus. See ärgu kasutajat kohutagu, sest vahetult õpitavat võib leida õpikust, varemõpitut ning kordamist vajavat saab aga kasutada ka teatmikus toodud kujul. Seda asjaolu arvestades autorid enamasti ei nimeta ühtesid fakte teoreemideks ja teisi nende järeldusteks, sest sageli võib vastavat teooriat käsitleda ka vastupidiselt. Teoreemidena on esitatud peamiselt sellised faktid, mida tuntakse nende ajaloolise nimetuse järgi.

3. Kuidas kasutada teatmikku? Vajaliku leiab kasutaja kõige kiiremini registri abil. Viited registris on tehtud artiklitele. Koolimatemaatikas vähem esinevaile termineile viidatakse tekstis. Kui teatmiku kasutaja on

otsitava fakti nimetuse unustanud, siis tuleb lähtuda küllalt detailsest sisukorrast.

4. Autorid avaldavad südamlikku tänu kõigile neile arvukatele kolleegidele, kes suure tähelepanuga võtsid osa käsikirja retsenseerimisest ning tegid olulisi märkusi, aga ka juba ette kõigile neile, kes võtavad vaevaks teatada oma märkustest ja soovidest käesoleva raamatu kohta.

MATEMAATILISED SÜMBOLID

$=$	võrdne
$\neq$	mittevõrdne
$\equiv$	samasus
$\approx$	ligikaudu võrdne
$<$	väiksem kui
$>$	suurem kui
$\leqslant$	mitte suurem kui
$\geqslant$	mitte väiksem kui
$\sim$	ekvivalentne
$+$	liitmismärk (pluss)
$-$	lahutamismärk (miinus)
$\cdot$	korrutamismärk, vektorite skalaarkorrutis
$\times$	korrutamismärk, vektorite vektorkorrutis, hulkade ristkorrutis
$:$	jagamismärk
$\frac{a}{b}$ või a/b	murrujoon, jagamismärk
$\mathbf{N}$	naturaalarvude hulk $\{0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	täisarvude hulk
$\mathbf{Z}^+$	positiivsete täisarvude hulk
$\mathbf{Q}$	ratsionaalarvude hulk
$\mathbf{R}$	reaalarvude hulk
$\mathbf{C}$	kompleksarvude hulk
∞	lõpmatus
$-\infty$	miinus lõpmatus
$[a]$	arvu a täisosa
$\lvert a \rvert$	arvu a absoluutväärtus (moodul)
%	protsent

$!$	faktoriaal
$( )$	ümarsulud
$[ ]$	nurksulud
$\{ \}$	looksulud
$\sum$	summa
$\vee$	sidesõna «või»
$\wedge$	sidesõna «ja»
$\Rightarrow$	loogiline järeldus ehk implikatsioon
$\Leftrightarrow$	loogiline ekvivalents
$\forall$	üldisuskvantor (sõna «iga»)
$\exists$	olemasolukvantor (sõna «leidub»)
$\{a; b; \ldots\}$	hulk elementidega $a, b, \ldots$
$\{x \mid P(x)\}$ või $\{x : P(x)\}$	omadusega $P(x)$ elementide hulk
$\cup$	hulkade (sündmuste) ühend
$\cap$	hulkade (sündmuste) ühisosa
$\setminus$	hulkade (sündmuste) vahe
$\in$	elemendi kuuluvus hulka
$\notin$ või $\overline{\in}$	elemendi mittekuuluvus hulka
$\subset$ või $\supset$	sisalduvuse märk ($C \subset D$ — hulk C on hulga D pärisosahulk)
$\subseteq$ või $\supseteq$	sisalduvuse märk ($C \subseteq D$ — hulk C on hulga D osahulk, kusjuures C võib ühtida hulgaga D)
$\varnothing$	tühi hulk (võimatu sündmus)
$[a; b]$	lõik (kõik reaalarvud x, mis rahuldavad tingimust $a \leqslant x \leqslant b$)
$]a; b[$	vahemik (kõik reaalarvud x, mis rahuldavad tingimust $a < x < b$)
$]a; b]$	poollõik (kõik reaalarvud x, mis rahuldavad tingimust $a < x \leqslant b$)
$[a; b[$	poollõik (kõik reaalarvud x, mis rahuldavad tingimust $a \leqslant x < b$)

$]a; \infty[$	poolsirge ($a < x < \infty$)
$[a; \infty[$	poolsirge ($a \leqslant x < \infty$)
$]-\infty; b[$	poolsirge ($-\infty < x < b$)
$]-\infty; b]$	poolsirge ($-\infty < x \leqslant b$)
(x_n)	jada elementidega x_n
$(a; b)$	järjestatud paar, punkt koordinaatidega a ja b, vektor koordinaatidega a ja b.
$(a; b; c)$	järjestatud kolmik, punkt koordinaatidega a, b ja c, vektor koordinaatidega a, b ja c
P_n	permutatsioonide arv n elemendist
V_n^k	variatsioonide arv n elemendist k-kaupa
C_n^k	kombinatsioonide arv n elemendist k-kaupa
$\sqrt[n]{}$	n-nda astme juur
$\sqrt{}$	ruutjuur
$\sqrt[3]{}$	kuupjuur
a^x	arv a astmes x
$\log_a$	logaritm alusel a
$\log$	kümnendlogaritm
$\ln$	naturaallogaritm
$\sin$	siinus
$\cos$	koosinus
$\tan$	tangens
$\cot$	kootangens
$\arcsin$	arkussiinus
$\arccos$	arkuskoosinus
$\arctan$	arkustangens
arccot	arkuskootangens
e	arv e, selle eksponentfunktsiooni alus, mille puhul $(e^x)' = e^x$

$\exp$	eksponentfunktsioon alusega e
$\exp_a$	eksponentfunktsioon alusega a
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	jada (x_n) piirväärtus
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	funktsiooni f piirväärtus kohal a
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	funktsiooni f parempoolne piirväärtus kohal a
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	funktsiooni f vasakpoolne piirväärtus kohal a
$y=f(x)$	kujutus või funktsioon (loe: y võrdne ef x, funktsioon f)
f^{-1}	kujutuse f pöördkujutus
$f_1 \circ f_2$	kujutuste f_1 ja f_2 kompositsioon
$f(x)$	funktsiooni f väärtus kohal (punktis) x
$D(f)$	funktsiooni f määramispiirkond
$E(f)$	funktsiooni f muutumispiirkond
Δx	muutuja x muut
$\Delta f(x)$	funktsiooni f muut kohal x
$f'(x)$	funktsiooni f tuletis kohal x
$f''(x)$	funktsiooni f teist järku tuletis kohal x
$f^{(n)}(x)$	funktsiooni f n-ndat järku tuletis kohal x
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)$	funktsiooni f suurim väärtus lõigus $[a; b]$
$\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$	funktsiooni f vähim väärtus lõigus $[a; b]$
$\sup\limits_{[a;\,b]} f(x)$	funktsiooni f ülemine raja lõigus $[a; b]$
$\inf\limits_{[a;\,b]} f(x)$	funktsiooni f alumine raja lõigus $[a; b]$
$\int$	integraal
$\int_a^b f(x)\,dx$	integraal funktsioonist f rajades a-st b-ni
(AB)	sirge läbi punktide A ja B
$[AB]$	punkte A ja B ühendav lõik

$(AB$	kiir punktist A läbi punkti B
$\lvert AB\rvert = AB$	lõigu $[AB]$ pikkus
(ABC)	tasand läbi punktide A, B ja C
$\vec{AB}$ või $\vec{a}$	vektor
$M(x; y; z)$	punkt koordinaatidega x, y, z
või $M=(x; y; z)$	
$\vec{a}=(x; y; z)$	vektor koordinaatidega x, y, z
$\lvert\vec{AB}\rvert = \lvert AB\rvert$	vektori pikkus
või $\lvert\vec{a}\rvert = a$	
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ või $\vec{a}\vec{b}$	vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis
$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$	vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutis
$K_1 \cong K_2$	kujundid K_1 ja K_2 on kongruentsed
$K_1 \sim K_2$	kujundid K_1 ja K_2 on sarnased
$\parallel$ ($\nparallel$)	paralleelsed (mitteparalleelsed)
$\uparrow\uparrow$	samasuunalised
$\uparrow\downarrow$	vastassuunalised
$\perp$	risti
$\angle$	nurk, kahetahuline nurk
$\angle$	nurga suurus (nurga sümboli kohal)
$(\widehat{a, b})$	nurk sirgete a ja b vahel
$(\widehat{a, \alpha})$	nurk sirge a ja tasandi α vahel
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	nurk vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahel
$(\widehat{\alpha, \beta})$	nurk tasandite α ja β vahel
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	ristbaas
0, $\vec{AA}$	nullvektor
S	pindala
V	ruumala

KREEKA TÄHESTIK

A, α — alfa	N, ν — nüü
B, β — beeta	Ξ, ξ — ksii
Γ, γ — gamma	O, o — omikron
Δ, δ — delta	Π, π — pii
E, ε — epsilon	P, ϱ — roo
Z, ζ — dzeeta	Σ, σ — sigma
H, η — eeta	T, τ — tau
Θ, ϑ — teeta	Υ, υ — üpsilon
I, ι — ioota	Φ, φ — fii
K, ϰ — kapa	X, χ —hii
Λ, λ — lambda	Ψ, ψ — psii
M, μ — müü	Ω, ω — oomega

1. HULGAD

1.1. VÕRDUS

S ü m b o l i g a $=$ (*võrdusmärk*) tähistatakse antud objektide võrdsust, identsust või samasust.

N ä i t e i d. $10:2=5$; $\vec{v}=(a;\ b)$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Võrdusmärgiga väljendatavat seost nimetame **võrduseks**. Viimasel on ekvivalentsiseose (art. 2.1.4.) o m a d u s e d:

1) refleksiivsus: $a=a$;
2) sümmeetrilisus: kui $a=b$, siis $b=a$;
3) transitiivsus: kui $a=b$ ja $b=c$, siis $a=c$.

Võrdusmärki kasutatakse matemaatikas mitmes erinevas tähenduses. Nii kasutame teda uue mõiste defineerimisel, näiteks $a^2=a\cdot a$. Samuti kasutame võrdusmärki võrrandi eri poolte ühendamiseks, näiteks $4x-1=3x$. Viimane võrdus väljendab tinglikku võrdust, sest selle võrduse vasak ja parem pool saavad võrdseiks vaid muutuja x väärtuse 1 puhul.

Sümboli $=$ eitust märgitakse s ü m b o l i g a $\neq$ (mittevõrdne).

1.2. LOOGIKA SÜMBOLID

S ü m b o l i t $\vee$ kasutatakse sidesõna «*või*» tähenduses ning sümbolit $\wedge$ sidesõna «*ja*» tähenduses.

S ü m b o l i g a $\Rightarrow$ märgitakse **loogilist järeldust (implikatsiooni)**. Kui P ja Q on vaadeldava hulga elementide mingid omadused, siis kirjutis $P \Rightarrow Q$ tähendab, et omadusest P järeldub omadus Q. Matemaatikas öeldakse selle kohta, et «*omadus P on piisav omaduseks Q*» või siis «*omadus Q on tarvilik omaduseks P*».

Näide. $a<-1 \Rightarrow |a|>1$. Sõnades: kui reaalarv a on väiksem miinus ühest, siis tema absoluutväärtus on suurem ühest.

Kui omadusest P järeldub omadus Q ja vastupidi, siis kirjutame seda kujul $P \Leftrightarrow Q$ (**loogiline ekvivalents**). Sõnades väljendame seda ühel kolmest viisist:

1) *omadus P on tarvilik ja piisav omaduseks Q;*
2) *omadus P on siis ja ainult siis, kui on omadus Q;*
3) *omadus P on parajasti siis, kui on omadus Q.*

Näide. $a^2<1 \Leftrightarrow |a|<1$. Sõnades: reaalarvu a ruut on väiksem ühest parajasti siis, kui arvu a absoluutväärtus on väiksem ühest.

Väljendi *«igal elemendil x on omadus P»* asemel kirjutatakse $\forall x\, P(x)$.

Näide. Kirjutis $\forall x\, 2^x>0$ tähendab tõsiasja, et muutuja x iga väärtuse korral on 2^x positiivne.

Väljendi *«leidub (eksisteerib) element x, millel on omadus P»* asemel kirjutatakse $\exists x\, P(x)$.

Näide. Kirjutis $\exists \alpha \sin \alpha = 1$ tähendab, et leidub niisugune nurk α, mille siinus võrdub ühega.

Sümbolit $\forall$ nimetatakse **üldisus-** ehk **universaalsuskvantoriks** ning sümbolit $\exists$ **olemasolu-** ehk **eksistentsikvantoriks.**

1.3. HULK JA OSAHULK

1.3.1. Hulk on kaasaegse matemaatika üheks põhimõisteks, milleni jõutakse intuitiivselt, tuginedes näidetele.

Näiteid. Õpilaste hulk klassis; poiste hulk pioneerirühmas; paarisarvude hulk; täisnurksete kolmnurkade hulk.

Hulk koosneb **elementidest.** Hulk on määratud (antud), kui on olemas eeskiri, mille järgi saab otsustada, kas vaadeldav objekt (element) kuulub sellesse hulka või mitte.

Hulki tähistatakse suurte tähtedega A, B, C jne.,

hulga elemente aga väikeste tähtedega a, b, c jne. Lauset *«element a kuulub hulka E»* tähistatakse sümboliga

$$a \in E.$$

Lauset *«element b ei kuulu hulka E»* märgitakse sümboliga

$$b \notin E \quad \text{või} \quad b \overline{\in} E.$$

Hulkade märkimiseks kasutatakse looksulge, mille vahele paigutatakse antud hulga elemendid.

Näiteid. 1. $E=\{1; 5; 15; 4; 71\}$.
2. $N=\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

Hulga esitamisel võib vaadeldavaid objekte tähistada ühise sümboliga, näiteks x. Sel juhul antakse ka eeskiri elemendi x vaadeldavasse hulka kuulumise või mittekuulumise kontrollimiseks. Eeskiri eraldatakse elemendi tähisest püstkriipsu või kooloniga.

Näide. $E=\{x|2x+3>5\}$ või $E=\{x : 2x+3>5\}$.

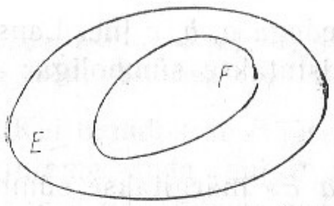
Enamasti ei tegelda mitte hulkadega üldse, vaid teatavat kindlat liiki hulkadega. Näiteks aritmeetikas vaadeldakse vaid hulki, mille elemendid on positiivsed ratsionaalarvud, geomeetrias aga hulki, mille elemendid on ruumi punktid. Nendel juhtudel kõneldakse **universaalsest hulgast.** Aritmeetika jaoks on universaalne hulk positiivsete ratsionaalarvude hulk, geomeetria jaoks ruumi punktide hulk.

1.3.2. Osahulk. Hulka F, mille kõik elemendid on ka hulga E elementideks, nimetatakse hulga E **osahulgaks** (joon. 1.1).

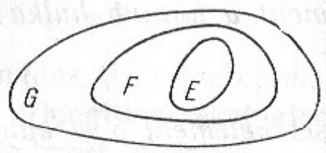
Sümboolselt: $F \subseteq E$ ehk $E \supseteq F$.

Öeldakse, et *hulk F sisaldub hulgas E* või *hulk E sisaldab hulga F.* Kui vaadeldav osahulk F ei ühti kogu hulgaga E, siis kõneldakse hulga E **pärisosahulgast** ning märgitakse $F \subset E$ ehk $E \supset F$.

Hulka, milles ei ole ühtki elementi, nimetatakse **tühjaks hulgaks** ning tähistatakse sümboliga $\varnothing$.



Joon. 1.1



Joon. 1.2

Sisalduvuse omadused.

1. Iga hulga E puhul $\varnothing \subseteq E$.
2. Iga hulk E on iseenda osahulk, s. t. $E \subseteq E$ (*sisalduvuse refleksiivsus*).
3. Kui $E \subseteq F$ ja $F \subseteq E$, siis $E = F$ (*identsuse seadus*).
4. Kui $E \subseteq F$ ja $F \subseteq G$, siis $E \subseteq G$ (*sisalduvuse transitiivsus*), (joon. 1.2).

1.4. TEHTED HULKADEGA

1.4.1. Hulkade ühend ehk summa

Def. Kahe hulga E ja F **ühendiks** $E \cup F$ nimetatakse hulka, mille elementideks on nii hulga E kui ka hulga F elemendid ja ainult need (joon. 1.3).

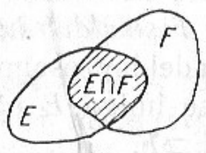
Hulkade ühendi omadused.

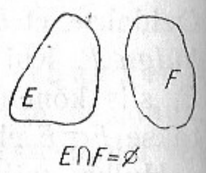
1. $E \cup F = F \cup E$ (*kommutatiivsus*).
2. $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ (*assotsiatiivsus*).
3. $E \subseteq F \leftrightarrow E \cup F = F$.
4. $E \cup E = E$.

Et hulkade E ja F ühendi moodustamisel lisatakse (liidetakse) hulga E elementidele hulga F elemendid, mis ei kuulu hulka E, siis kõneldakse E ja F ühendi asemel ka hulkade E ja F summast. Seetõttu kasutatakse sümboli $E \cup F$ asemel ka sümbolit $E+F$.

$E \cup F$

Joon. 1.3





$E \cap F = \varnothing$

Joon. 1.4

Kui on antud hulgad $E_1, E_2, \ldots, E_n$, siis nende ühendit tähistatakse sümboliga

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

1.4.2. Hulkade ühisosa ehk korrutis

Def. Kahe hulga E ja F **ühisosaks** $E \cap F$ nimetatakse hulka, mille elementideks on hulkade E ja F ühised elemendid ja ainult need (joon. 1.4).

Hulkade ühisosa omadused.

1. $E \cap F = F \cap E$ (*kommutatiivsus*).
2. $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ (*assotsiatiivsus*).
3. $H \subseteq E \leftrightarrow H \cap E = H$.
4. $E \cap F = \varnothing \leftrightarrow$ hulkadel E ja F pole ühiseid elemente.
5. $E \cap E = E$.

Kui on antud hulgad $E_1, E_2, \ldots, E_n$, siis nende ühisosa tähistatakse sümboliga

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k.$$

Hulkade E ja F ühisosa nimetatakse mõnikord ka hulkade E ja F korrutiseks ning tähistatakse $E \cdot F$.

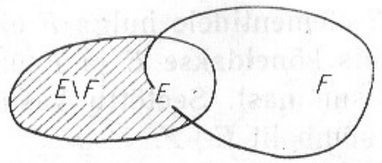
Distributiivsuse seadused.

1. $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
2. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Neist seadustest esimene on samasugune kui distributiivsuse seadus reaalarvude hulgas **R**, kus ühendi märk $\cup$ asendub summa märgiga ning ühisosa märk $\cap$ korrutise märgiga. Teisel distributiivsuse seadusel ei ole niiviisi tõlgendades vastet aritmeetikas.

1.4.3. Hulkade vahe

Def. Hulkade E ja F **vaheks** $E \setminus F$ nimetatakse hulka, mille elementideks on need ja ainult need hulga E elemendid, mis ei kuulu hulka F (joon. 1.5).



Joon. 1.5

Näide. Hulkade $A=\{2; 3; 4; 5; 6\}$ ja $B=\{1; 3; 5; 7\}$ vahe $A\setminus B$ on hulk $\{2; 4; 6\}$.

Hulkade vahe omadused.

1. $E\setminus F=E\setminus(E\cap F)$.
2. $(E\setminus F)\cup F=E\cup F$.
3. $E\setminus F=\varnothing \Leftrightarrow E\subseteq F$.
4. $E\setminus F=E \Leftrightarrow E\cap F=\varnothing$.
5. $(E\setminus F)\cap G=(E\cap G)\setminus(F\cap G)$.

Hulkade vahet tähistatakse mõnikord ka aritmeetikast pärineva miinusmärgi abil, kirjutades sümboli $E\setminus F$ asemel $E-F$.

1.4.4. Hulga täiend. Kui vaatleme kõiki antud hulki mingi universaalse hulga S osahulkadena, siis võime kõnelda vaadeldava hulga E **täiendist hulgani** S. Hulga E täiend $\mathbf{C}_S E$ defineeritakse seosega

$$\mathbf{C}_S E=S\setminus E.$$

Sümboli $\mathbf{C}_S E$ asemel kasutatakse ka sümboleid E'_S ja $\bar{E}$.

Kui ei ole karta segiminekut, millise hulgani on täiendit vaadeldud, siis tähistatakse täiendit sümboliga $\mathbf{C}E$.

Täiendi omadused.

1. $\mathbf{C}(E\cup F)=\mathbf{C}E\cap\mathbf{C}F$.
2. $\mathbf{C}(E\cap F)=\mathbf{C}E\cup\mathbf{C}F$.

1.4.5. Hulkade ristkorrutis.

Def. Hulkade E ja F **ristkorrutiseks** $E\times F$ nimetatakse hulka, mille elemendid on kõikvõimalikud paarid $(x; y)$, kus $x\in E$ ja $y\in F$.

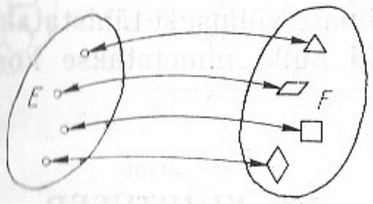
Näide. $E=\{a; b; c\}$, $F=\{1; 2\}$.
$E\times F=\{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$.

Hulkade ristkorrutise **omadused.**

1. $E\neq F \Rightarrow E\times F\neq F\times E$.
2. $E\times\varnothing=\varnothing\times E=\varnothing$.

1.5. HULKADE EKVIVALENTSUS JA VÕIMSUS

1.5.1. Hulkade ekvivalentsus. Kui on võimalik korraldada niisugune vastavus kahe hulga E ja F elementide vahel, et hulga E igale elemendile vastab hulga F üks ja ainult üks element ning hulga F iga element on vastavuses ainult ühega hulga E elementidest, siis öeldakse, et nende hulkade elemendid on *üksüheses vastavuses* (joon. 1.6).



Joon. 1.6

Def. Hulki, mille elementide vahel saab korraldada üksühese vastavuse, nimetatakse **ekvivalentseteks.**

Näide. Paaritute arvude hulk on ekvivalentne kõigi naturaalarvude hulgaga N.

Tõepoolest, igat paaritut arvu saab kirjutada kujul $2n+1$, kus n on naturaalarv. Korraldades vastavuse $2n+1 \leftrightarrow n$, saamegi, et paaritute arvude hulk on seatud üksühesesse vastavusse naturaalarvude hulgaga.

1.5.2. Hulga võimsus. Hulka, millel leidub temaga ekvivalentne pärisosahulk, nimetatakse **lõpmatuks hulgaks,** vastasel juhul **lõplikuks hulgaks.** Ekvivalentsete hulkade kohta öeldakse, et nad on võrdvõimsad. Lõplikud hulgad on võrdvõimsad parajasti siis, kui nendes hulkades on võrdne arv elemente. Elementide arvu nimetatakse

lõpliku hulga võimsuseks. Tühja hulga $\varnothing$ võimsus on 0. Hulga $\{a; b; c\}$ võimsus on 3.

Lõpliku hulga E iga pärisosahulga võimsus on väiksem hulga E võimsusest.

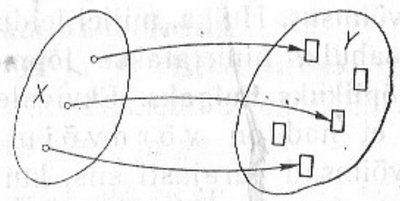
Näide. Olgu **N** kõigi naturaalarvude ja P paarisarvude hulk. Siis $\mathbf{N} \supset P$ ja $\mathbf{N} \neq P$, kusjuures leidub üksühene vastavus $n \leftrightarrow 2n+2$ hulkade **N** ja P elementide vahel.

Naturaalarvude hulga **N** võimsust tähistatakse sümboliga $\aleph_0$ ($\aleph$ on heebrea tähestiku esimene täht alef). Kõiki hulki, mis on ekvivalentsed naturaalarvude hulgaga, nimetatakse **loenduvateks hulkadeks.**

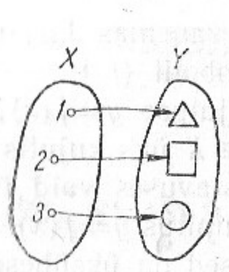
Osutub, et kõigi reaalarvude hulk ei ole ekvivalentne naturaalarvude hulgaga. Kõigi reaalarvude hulk, samuti tasandi punktide hulk, on ekvivalentsed lõigu $[0; 1]$ punktide hulgaga. Viimase võimsust tähistatakse sümboliga $\aleph$. Kõiki niisuguseid hulki nimetatakse **kontiinumi võimsusega hulkadeks.**

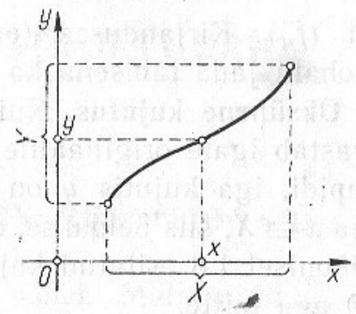
1.6. KUJUTUSED

Kui hulga X igale elemendile x on vastavusse seatud üks ja ainult üks element y hulgast Y, siis öeldakse, et on antud hulga X kujutus hulka Y (joon. 1.7). Seda kujutust märgitakse sümboliga f või $y=f(x)$. Kui sellisest vastavusest võtavad osa kõik hulga Y elemendid, siis öeldakse, et on antud hulga X kujutus hulgale Y (joon. 1.8).

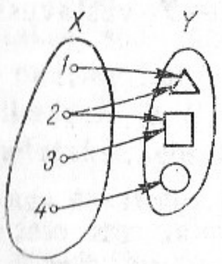


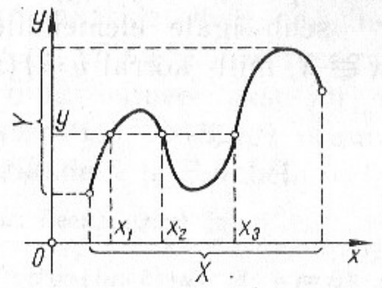
Joon. 1.7





Joon. 1.8





Joon. 1.9

1.6.1. Kujutis ja originaal. Olgu antud hulga X kujutus f. Igat elementi $y=f(x) \in Y$ nimetatakse elemendi x **kujutiseks** ning elementi x vastava elemendi y **originaaliks.** Elemendi y originaali tähistatakse sümboliga $f^{-1}(y)$.

Kui E on hulga X mingi osahulk, s. t. $E \subset X$, ja G nende kujutiste hulk, mille originaalid kuuluvad hulka E, s. t. $G=\{y \mid y=f(x),\ x \in E\}$, siis hulka G nimetatakse hulga E kujutiseks ning hulka E hulga G originaaliks. Sümbolites: $G=f(E)$ ja $E=f^{-1}(G)$.

1.6.2. Jada. Naturaalarvude hulga **N** kujutust f hulka Y nimetatakse hulga Y elementide **jadaks.** Sel juhul kasutatakse kujutise tähistamisel sümboli $f(n)$ asemel kirjutist f_n või y_n (s. t. $y_n=f(n)$) ning kõneldakse originaali asemel **indeksist** n. Samuti ei kasutata jada tähisena mitte sümbolit f, vaid kirjutist $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ või

lühemalt (f_n). Kirjanduses (eriti vanemas kirjanduses) võime kohata jada tähisena ka sümbolit $\{f_n\}$.

1.6.3. Üksühene kujutus. Kui kujutuse $y=f(x)$, $x \in X$ korral vastab igale originaalile $x \in X$ üks kujutis $y \in Y$, ja vastupidi, iga kujutis y on vastavuses vaid ühe originaaliga $x \in X$, siis öeldakse, et kujutus $y=f(x)$ on üksühene. Joonisel 1.8 esitatud kujutused on üksühesed, joonisel 1.9 aga mitte.

Kui kujutus f kujutab hulga X üksüheselt hulgale Y, siis öeldakse, et kujutusel f eksisteerib pöördkujutus, mida tähistatakse f^{-1} või $x=f^{-1}(y)$. Kujutuse f pöördkujutus f^{-1} seab igale elemendile $y \in Y$ vastavusse elemendi $x \in X$, mille korral $y=f(x)$.

2. SEOSED. STRUKTUURID

2.1. SEOSED EHK RELATSIOONID

2.1.1. Seos kahe hulga vahel. Matemaatikas vaadeldakse sageli seoseid kahe erineva hulga elementide vahel. Seos võib olla antud sõnalise kirjeldusena, tabelina, graafikuna, valemina, paaride hulgana jne. Tihti on kasulik vaadelda seost järjestatud paaride hulgana. Seetõttu samastatakse seos ühe tema võimaliku esitusega, järjestatud paaride hulgaga, ning defineeritakse järgmiselt.

Def. Hulkade A ja B ristkorrutise $A \times B$ iga osahulka S nimetatakse **seoseks hulkade A ja B vahel.**

Näide. Olgu $A=\{\text{Volga; Dnepr; Leena; Don}\}$ ja $B=\{4270; 3690; 2285; 1970\}$.
Nende hulkade ristkorrutise $A \times B=\{(a; b) \mid a \in A;\ b \in B\}$ osahulk $S=\{(\text{Volga; } 3690); (\text{Dnepr; } 2285); (\text{Leena; } 4270); (\text{Don; } 1970)\}$ esitab seost «jõe a pikkus on b km».

Antud seose mõiste on üldistatav kolmekohalise, neljakohalise jne. seose mõisteks.

Def. Hulga $A \times (B \times D)=A \times B \times D$ iga osahulka nimetatakse kolmekohaliseks seoseks.

Näide. Vektorite skalaarkorrutis $\vec{v} \cdot \vec{u}=d$ on kolmekohaline seos, kus A ja B on vektorite hulgad ning D reaalarvude hulk.

2.1.2. Funktsionaalne seos

Def. Seost, mille esimesed elemendid kõigis seosele kuuluvais paarides on erinevad, nimetatakse **funktsionaalseks seoseks.**

Tähistame funktsionaalses seoses paaride esimese elemendi sümboliga x ja teise sümboliga y. Elementide x hulka X nimetatakse vaadeldava seosega defineeritud funktsiooni määramispiirkonnaks ning elementide y hulka Y funktsiooni muutumispiirkonnaks. Funktsionaalse seose kohaselt on igale elemendile $x \in X$ vastavusse seatud kin-

del element $y \in Y$. Seda vastavust tähistatakse sümboliga f, kirjutades $y=f(x)$. Sümbol f tähistab eeskirja, mille järgi saadakse argumendi x väärtusele vastav funktsiooni väärtus y.

2.1.3. Seos antud hulgas

Def. Hulga $A \times A$ iga osahulka S nimetatakse **seoseks hulgas** A. Seost S hulgas A nimetatakse

refleksiivseks, kui $(x; x) \in S$ iga $x \in A$ korral;

antirefleksiivseks, kui $(x; x) \notin S$ ühegi $x \in A$ korral;

sümmeetriliseks, kui $(x; y) \in S \Rightarrow (y; x) \in S$;

antisümmeetriliseks, kui $(x; y) \in S \wedge x \neq y \Rightarrow (y; x) \notin S$;

transitiivseks, kui $(x; y) \in S \wedge (y; z) \in S \Rightarrow (x; z) \in S$.

Def. Hulga $A \times A \times A$ iga osahulka nimetatakse kolmekohaliseks seoseks hulgas A.

Näiteid. 1. Aritmeetilised tehted on kolmekohalised seosed vaadeldavas arvuhulgas.

2. Iga algebraline operatsioon (art. 2.3.1.) on kolmekohaline seos vaadeldavas hulgas.

2.1.4. Ekvivalentsiseos

Def. Seost S hulgas A nimetatakse **ekvivalentsiks,** kui S on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Ekvivalentsiseost märgitakse sümboliga $\sim$.

Ekvivalentsiseos teeb vaadeldavas hulgas A klassijaotuse, määrates nn. **ekvivalentsiklassid**

$$A_a = \{x \mid x \in A \wedge x \sim a\},$$

kus $a \in A$.

Need rahuldavad klassijaotuse aksioome:

1) hulgas A on moodustatud mittetühjade osahulkade süsteem;

2) iga kahe vaadeldava osahulga ühisosa on tühi;

3) kõigi vaadeldavate osahulkade ühend on hulk A.

2.1.5. Järjestusseos

Def. Seost S nimetatakse **range järjestuse seoseks** hulgas A, kui S on antirefleksiivne ja transitiivne.

Reaalarvude puhul märgitakse range järjestuse seost sümboliga $<$ (*«väiksem kui»*).

Def. Seost S nimetatakse **mitterange järjestuse seoseks** hulgas A, kui S on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

Reaalarvude puhul märgitakse mitterange järjestuse seost sümboliga $\leqslant$ (*«mitte suurem kui»*).

2.2. STRUKTUUR

Kui vaadeldavas hulgas on vähemalt üks seos (tehe), siis öeldakse, et sel hulgal on teatav **struktuur.** Kahel hulgal võib olla ühine struktuur, kusjuures need hulgad võivad erineda 1) elementide, 2) ühist struktuuri määravate seoste tähenduste, 3) teiste seoste poolest. Ühes hulgas võib olla määratud mitu seost (tehet).

Näiteks reaalarvude hulgal **R** on korpuse struktuur (liitmise ja korrutamise tehted koos vastavate omadustega), järjestuse struktuur ja pidevuse struktuur.

2.3. ALGEBRALISED STRUKTUURID

2.3.1. Algebraline operatsioon ehk tehe.

Kui mingi hulga A igale kindlas järjekorras võetud elementide paarile a ja b on seatud vastavusse sama hulga A üks kindel element c, siis öeldakse, et hulgas A on defineeritud **tehe** ehk **algebraline operatsioon.** See tehe võib olla liitmine, korrutamine, logaritmimine, diferentseerimine, ühisosa leidmine jne. Kui tehet ei ole täpsustatud, siis kasutatakse tema tähistamiseks sümbolit $\bigcirc$.

Tehet nimetatakse assotsiatiivseks, kui selle tehte korral kehtib seadus:

$$(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c).$$

Tehet nimetatakse kommutatiivseks, kui tema korral kehtib seadus

$$a \bigcirc b = b \bigcirc a.$$

Näide. Arvude korrutamise ja liitmise tehted on assotsiatiivsed ja kommutatiivsed.

Hulka, milles on defineeritud vähemalt üks tehe, nimetatakse **algebraliseks struktuuriks.**

Kui mingis hulgas on defineeritud kaks tehet, siis tavaliselt nimetatakse üht neist liitmiseks ja teist korrutamiseks.

2.3.2. **Poolrühm**

Def. Hulka, milles on defineeritud üks assotsiatiivne tehe, nimetatakse **poolrühmaks.**

Def. Poolrühma, milles defineeritud tehe on kommutatiivne, nimetatakse **kommutatiivseks poolrühmaks.**

Kui vaadeldav tehe on liitmine, siis kõneldakse **aditiivsest poolrühmast,** korrutamise puhul **multiplikatiivsest poolrühmast.**

2.3.3. **Rühm**

Def. Poolrühma A nimetatakse **rühmaks,** kui

1) hulgas A eksisteerib element e (ühik), et $a \circ e = e \circ a = a$ iga $a \in A$ puhul;

2) iga $a \in A$ puhul eksisteerib a' (elemendi a pöördelement), et $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Def. Kommutatiivset poolrühma A nimetatakse **kommutatiivseks** ehk **Abeli rühmaks,** kui vaadeldaval tehtel eksisteerib pöördtehe, s. t. võrrand

$$a \circ x = b$$

on lahenduv poolrühma A kõikide elementide a ja b korral.

Näiteid. 1. Kõigi täisarvude hulk on aditiivne Abeli rühm.
2. Kõigi reaalarvuliste koordinaatidega vektorite hulk on aditiivne Abeli rühm.
3. Kaheelemendiline hulk $B = \{1; -1\}$ on multiplikatiivne Abeli rühm.

Igas Abeli rühmas A leidub üheselt määratud element e, mis rahuldab tingimust

$$a \circ e = a, \quad \forall\, a \in A.$$

Multiplikatiivses rühmas nimetatakse elementi e **ühikelemendiks** ehk **ühikuks,** aditiivses rühmas **nullelemendiks** ehk **nulliks.**

Rühma A iga elemendi a korral eksisteerib üheselt määratud element $a' \in A$, et

$$a \circ a' = e.$$

Elementi a' nimetatakse multiplikatiivses rühmas **pöördelemendiks,** aditiivses rühmas **vastandelemendiks.**

2.3.4. **Ring.** Lihtsaim kahe operatsiooniga hulkadest kannab ringi nime.

Def. Kahe operatsiooniga algebralist struktuuri A nimetatakse **ringiks,** kui

1) A on Abeli rühm liitmise suhtes,
2) A on poolrühm korrutamise suhtes,
3) korrutamine on distributiivne liitmise suhtes.

Kui ka korrutamine on kommutatiivne, siis vastavat ringi nimetatakse **kommutatiivseks ringiks.**

Kommutatiivne ring on seega määratud järgmiste arvutusseadustega ehk ringi aksioomidega.

1. *Liitmise kommutatiivsuse seadus:*

$$a + b = b + a.$$

2. *Liitmise assotsiatiivsuse seadus:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

3. *Lahutamise olemasolu seadus:*
võrrandil $b + x = a$ on iga $a \in A$ ja $b \in A$ puhul lahend $x \in A$.

4. *Korrutamise kommutatiivsuse seadus:*

$$ab = ba.$$

5. *Korrutamise assotsiatiivsuse seadus:*

$$(ab)c = a(bc).$$

6. *Korrutamise distributiivsuse seadus liitmise suhtes:*

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Näiteid. 1. Täisarvude hulk on ring.
2. Kõigi konstantsete ja lineaarfunktsioonide hulk on ring.

Kui A on kommutatiivne ring ja 0 tema nullelement, siis $a \cdot 0 = 0$ iga $a \in A$ korral.

2.3.5. Korpus on ring, mille kõik nullist erinevad elemendid moodustavad rühma korrutamise suhtes.

Näide. Kõigi ratsionaalarvude hulk on korpus.

Korpust nimetatakse kommutatiivseks, kui ka korrutamine on kommutatiivne.

Korpuses kui nullist erinevate elementide suhtes multiplikatiivses ringis on olemas ühikelement ning ka pöördelement b^{-1} igale nullist erinevale elemendile b. Seetõttu on võrrandil $bx = a$ lahend iga a ja $b \neq 0$ puhul.
Kommutatiivne korpus A on määratud kommutatiivse ringi aksioomidega 1.—6. ning lisaks neile peab kehtima veel järgmine seadus.

7. *Jagamise olemasolu seadus:*
võrrandil $bx = a$ on iga a ja $b \neq 0$ korral lahend $x \in A$.

Näide. Olgu a ja b ratsionaalarvud. Sel juhul on kaksliikmete $a + b\sqrt{2}$ hulk korpus, kui liitmine ja korrutamine defineerida tavalisel viisil.

2.4. FUNKTSIOONI MÕISTE

2.4.1. Muutuja ehk muutuv suurus

Def. Olgu X mingi hulk. Kui x tähistab suvalist elementi hulgast X, siis öeldakse, et x on **muutuv suurus** ehk **muutuja.**

Hulka X nimetatakse muutuja x **muutumispiirkonnaks** ning igat konkreetset elementi hulgast X **muutuja x väärtuseks.**

Märkus. Kui hulk X koosneb vaid ühest elemendist a, on suurus x sisuliselt konstant a. Seega on **konstant** ehk **konstantne suurus** äsjaesitatud definitsiooni kohaselt muutuva suuruse erijuht. Sageli on otstarbekas konstanti selliselt tõlgendada.

2.4.2. Funktsiooni definitsioon

Def. Kui muutuja x igale väärtusele hulgas (piirkonnas) X on vastavusse seatud muutuja y kindel väärtus, siis öeldakse, et hulgal X on määratud **funktsioon.**

Seda vastavust tähistatakse sümbolite abil järgmiselt:

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad \text{või} \quad x \to f(x), \quad x \in X,$$

ning kõneldakse funktsioonist $y = f(x)$.

Muutujat x nimetatakse funktsiooni **argumendiks** ehk **sõltumatuks muutujaks,** muutujat y **sõltuvaks muutujaks** ning tema väärtusi **funktsiooni väärtusteks.** Argumendi x muutumispiirkonda X nimetatakse funktsiooni **määramispiirkonnaks** ning muutuja y väärtuste hulka Y funktsiooni **muutumispiirkonnaks** ehk **funktsiooni väärtuste hulgaks.**

Definitsiooni kohaselt *on funktsioon antud,* kui on teada
1) funktsiooni määramispiirkond X,
2) eeskiri (sümbolina f), mille kohaselt muutuja x igale väärtusele määramispiirkonnast X vastab muutuja y väärtus $f(x)$.

Tähe f asemel kasutatakse vajaduse korral teisi sümboleid, näiteks g, h, F, G.

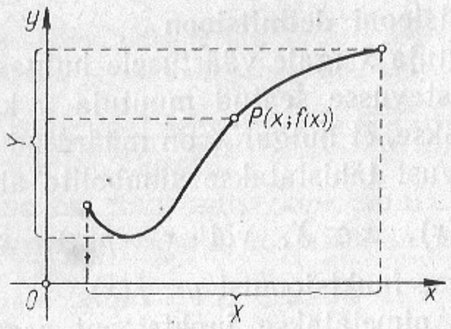
Sõltuva ja sõltumatu muutuja märkimiseks kasutatakse ka muid tähti, näiteks u ja t. Nii tähendavad $y = f(x)$ ja $u = f(t)$ üht ja sama funktsiooni, juhul kui nende määramispiirkonnad ühtivad. Seetõttu kõneldakse sageli lihtsalt funktsioonist f.

Kui X ja Y on mingid reaalarvude hulgad, siis on meil tegemist nn. **arvfunktsiooniga**. Enamikel juhtudel mõistamegi funktsioonina just arvfunktsiooni.

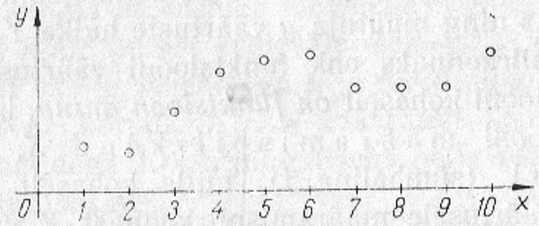
Funktsiooni $y = f(x)$ väärtust, mis vastab argumendi väärtusele $x = a$, tähistatakse sümboliga $f(a)$ ning kõneldakse *funktsiooni väärtusest kohal (punktis) a.*

Näide. Olgu $f(x) = 2 - x + x^2$.
Sel juhul $f(0) = 2 - 0 + 0^2 = 2$, $f(-2) = 2 - (-2) + (-2)^2 = 8$.

2.4.3. Funktsiooni graafik. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, $x \in X$. Märgime koordinaattasandil punktid, mille koordinaatideks on x ja $f(x)$. Kõigi niisuguste punk-



Joon. 2.1



Joon. 2.2

tide $P(x; f(x))$ hulka, kus $x \in X$, nimetatakse funktsiooni $y=f(x)$ **graafikuks** (joon. 2.1).

Kui funktsiooni määramispiirkonnaks on lõik $[a; b]$, kus see funktsioon on pidev, siis on graafikuks joon. On aga funktsiooni määramispiirkonnaks näiteks hulk $X=\{1; 2; 3; \ldots; 10\}$, siis funktsiooni graafikuks on mingi kümnest punktist koosnev hulk (joon. 2.2).

2.4.4. Funktsiooni esitusviisid. Funktsiooni esitamiseks tuleb näidata, kuidas argumendi väärtusele x on vastavusse seatud funktsiooni väärtus y. Selleks on mitmesuguseid võimalusi, millest tähtsamad on: **tabel, graafik, diagramm, võrrand** ja **analüütiline esitus valemi abil.**

Tabelina esitatud funktsioonide näiteks on logaritmide, trigonomeetriliste funktsioonide, ruutjuurte tabelid.

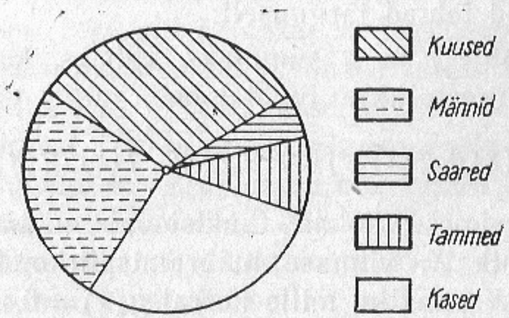
Funktsiooni *graafilise esitusviisi* all mõistetakse funktsiooni graafikut (vt. eelmine art.) tasandil. Graafikut

kasutatakse funktsioonide fikseerimiseks mitmesuguste isekirjutavate aparaatidega (seismograafid, ostsillograafid jne.), samuti paljudel juhtudel muutumise käigu iseloomustamiseks teiste esitusviiside kõrval.

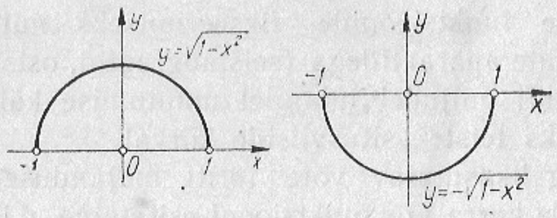
Üks sagelikasutatav võte (eriti majandusega seotud probleemide korral) on funktsiooni esitamine diagrammidena. Levinumad on nn. tulpdiagramm (joon. 2.3) ja sektordiagramm. Viimast kasutatakse sel juhul, kui funktsiooni väärtusteks on protsendid (joon. 2.4).

Matemaatika seisukohalt on kõige mugavam esitada funktsioon võrrandiga, näiteks $y=x+2$, $y=x^2$ jne. Sellisel juhul öeldakse, et funktsioon on esitatud analüütiliselt ehk valemiga. Funktsioon võib olla

Joon. 2.3



Joon. 2.4



Joon. 2.5

määratud ka niisuguse kaht muutujat sisaldava võrrandiga, milles üks muutuja ei ole teise kaudu avaldatud, näiteks $x^2+y^2=1$, $xe^{xy}-y^2=0$. Sel juhul on tegemist **ilmutamata funktsiooniga** (vastupidiselt nn. ilmutatud juhule $y=x^2$).

Näide. Vaatleme ilmutamata funktsiooni $x^2+y^2=1$. Seda võrrandit rahuldavad kõigi nende punktide koordinaadid, mis asuvad ringjoonel, mille keskpunkt on koordinaatide alguses ning raadius on 1. Seega võrrand esitab tõepoolest funktsiooni. Täpsemalt, selle võrrandiga on määratud lõigus $X=[-1;\ 1]$ kaks funktsiooni (joon. 2.5):

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{ja} \quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$

2.4.5. Tehted funktsioonidega. Kaht funktsiooni $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ nimetatakse **võrdseiks** $(f=g)$, kui

1) neil on ühine määramispiirkond X,
2) $f(x)=g(x)$ iga $x\in X$ korral.

Olgu antud kaks funktsiooni $y=f(x)$ ja $y=g(x)$, millel on ühine määramispiirkond X. Nendega defineeritakse aritmeetilised tehted järgmiselt:

funktsioonide f ja g **summaks, vaheks, korrutiseks** ja **jagatiseks** nimetatakse funktsioone, mille väärtused on vastavalt $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ ja $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, kusjuures esimese kolme funktsiooni määramispiirkonnaks on hulk X, viimase määramispiirkonda ei kuulu need hulga X punktid, mille korral $g(x)=0$.

Näide. Olgu $y=\sin x$ ja $y=x$. Nende funktsioonide jagatis on

funktsioon $y=\dfrac{\sin x}{x}$, mille määramispiirkond on $X=]-\infty;\ 0[\cup]0;\ \infty[$, s. t. kogu arvsirge, välja arvatud punkt $x=0$.

2.4.6. Liitfunktsioon. Olgu antud funktsioonid $y=f(u)$, $u\in U$ ja $u=g(x)$, $x\in X$, kusjuures $g(x)\in U$ iga $x\in X$ korral. Sel juhul saame kahekordse vastavuse

$$x\to u\to y$$

kaudu, et muutuja $x\in X$ igale väärtusele vastab muutuja y kindel väärtus

$$y=f(u)=f[g(x)].$$

Selline vastavus määrab hulgas X funktsiooni

$$y=F(x)=f[g(x)],$$

mida nimetatakse **liitfunktsiooniks** ehk **funktsioonide** f ja g **kompositsiooniks** ning märgitakse $f\circ g$. Funktsioone f ja g nimetatakse liitfunktsiooni koostisosadeks.

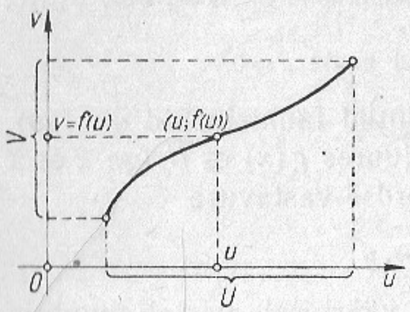
Liitfunktsiooni korral pole muutuja y määratud vahetult argumendi x, vaid nn. vahepealse muutuja kaudu.

Näide. Funktsiooni $y=\ln\sin x$, $x\in\,]0;\ \pi[$, võime vaadelda liitfunktsioonina, võttes

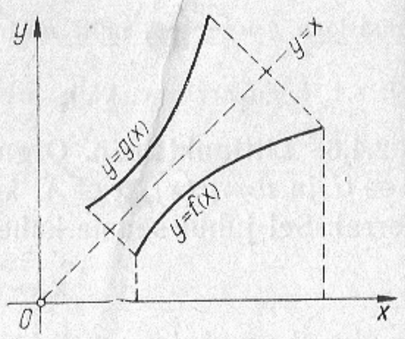
$$y=\ln u,\quad u=\sin x,\quad x\in\,]0,\pi[.$$

2.4.7. Pöördfunktsioon. Olgu $v=f(u)$, $u\in U$. Funktsiooni f väärtuste hulga tähistame sümboliga V. Sel juhul võime öelda, et funktsioon $v=f(u)$ korraldab vastavuse hulkade U ja V elementide vahel. Kui selline vastavus on üksühene (joon. 2.6), siis öeldakse, et funktsioonil $v=f(u)$ *eksisteerib pöördfunktsioon.* Viimase saamiseks seame igale elemendile $v\in V$ vastavusse muutuja u selle väärtuse, mille korral $f(u)=v$. Niisugune vastavus määrab teatava funktsiooni $u=g(v)$, mida nimetatakse funktsiooni $v=f(u)$ **pöördfunktsiooniks.** Pöördfunktsiooni $u=g(v)$ määramispiirkonnaks on funktsiooni $v=f(u)$ muutumispiirkond V ja muutumispiirkonnaks määramispiirkond U.

Kui tähistada funktsiooni $v=f(u)$ ja tema pöördfunkt-



Joon. 2.6



Joon. 2.7

siooni $u=g(v)$ argument tähega x, funktsiooni väärtus tähega y ning kujutada seejärel mõlema funktsiooni $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ graafikud ühes teljestikus, siis need graafikud on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes, s. t. koordinaattasandi I ja III veerandi nurgapoolitaja suhtes (joon. 2.7).

2.4.8. Ajaloost. Muutuva suuruse mõiste tekkis matemaatikas XVII sajandil, kui prantsuse filosoof ja matemaatik R. Descartes (1596—1650) vaatles kahe tundmatuga võrrandeid. Selle kohta kirjutas Friedrich Engels: «Pöördepunktiks oli matemaatikas Descartes'i muutuv suurus. Seetõttu pääsesid matemaatikasse liikumine ja dialektika ning sai otsekohe paratamatult vajalikuks diferentsiaal- ja integraalarvutus, mis tekibki viibimata ja mille üldjoontes viisid lõpule — mitte aga ei leiutanud — Newton ja Leibnitz.[1]» Nüüdisaegses matemaatikas on muutuv suurus saanud eriti avara tähenduse.

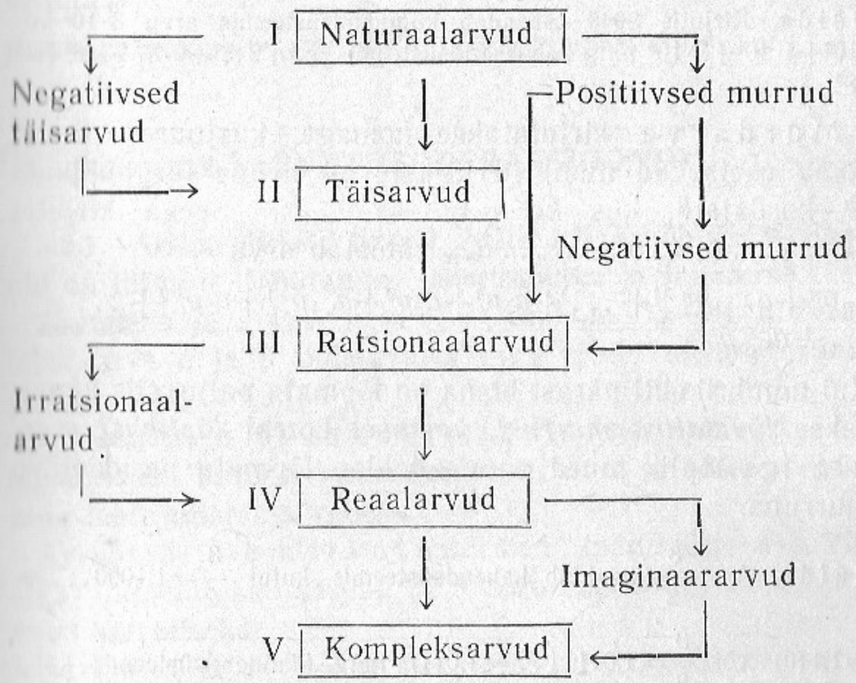
Mõiste «funktsioon» pärineb saksa matemaatikult ja filosoofilt G. W. Leibnizilt (1646—1716). Alates XVII sajandist on funktsiooni mõiste läbinud keerulise arengutee. Alles 1834. a. defineeris väljapaistev vene matemaatik N. J. Lobatševski (1792—1856) funktsiooni mõiste matemaatiliselt korrektselt. Sama definitsiooni võttis sõltumatult Lobatševskist kasutusele ka saksa matemaatik P. G. L. Dirichlet (1805—1859). See möödunud sajandi esimesest poolest pärit definitsioon on kasutusel tänaseni, kuigi viimasel ajal on hakatud kasutama ka seose mõistele tuginevat definitsiooni (vt. art. 2.1.2.). Lobatševskilt ja Dirichlet'lt pärinev funktsiooni definitsioon (art. 2.4.2.) on oma lihtsuse, korrektsuse ja ülevaatlikkuse tõttu siiski eelistatum.

[1] Engels, F., Looduse dialektika, Tallinn, 1962, lk. 197.

3. ARVUHULGAD

3.1. ARVU MÕISTE JA SÜMBOLID

3.1.1. Arvu mõiste ja tema areng. Arvu mõiste on matemaatika üks põhimõiste. Seoses esemete loendamisega tekkis ürgajal mõiste arvudest «üks», «kaks», «kolm» jne. Neid arve nimetatakse naturaalarvudeks. Arvu mõiste edasist arengut võib iseloomustada järgmise skeemiga.



3.1.2. Positsioonilised arvusüsteemid. Arvude tähistamiseks on vaja numbrimärke ja neist arvude moodustamise süsteeme. Me kasutame nn. **positsioonilist arvusüsteemi,** milles iga numbri tähendus sõltub tema asukohast (positsioonist) vaadeldavas arvus. Positsioonilise arvusüsteemi

aluseks on mingi naturaalarv p. Seejuures kasutatakse p erinevat numbrit 0, 1, 2, ..., $p-1$. Arve p^k ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) nimetatakse p-ndsüsteemi **järguühikuiks.**

Iga positiivne täisarv esitub kujul

$$N=a_0p^0+a_1p^1+a_2p^2+\ldots+a_np^n,$$

kus $a_0, a_1, \ldots, a_n$ on numbrid. Seda arvu kirjutatakse kujul

$$N=a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0.$$

Enamkasutatavaks arvusüsteemiks on kümnendsüsteem ($p=10$), kuid seoses nüüdisaegse arvutustehnikaga on laialdaselt kasutusel ka kahend- ($p=2$) ja kaheksandsüsteem ($p=8$).

Näide. Kirjutis 3043 tähendab kümnendsüsteemis arvu $3\cdot10^3+0\cdot10^2+4\cdot10^1+3\cdot10^0$ ning kaheksandsüsteemis arvu $3\cdot8^3+0\cdot8^2+4\cdot8^1+3\cdot8^0$.

Murdarve kirjutatakse komaga, kusjuures pärast koma asetsevad numbrid tähistavad nende järguühikute p^k kordajaid, kus $k=-1, -2, \ldots$. Seega kirjutis $a_na_{n-1}\ldots a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}$ tähistab arvu

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p^1+a_0p^0+a_{-1}p^{-1}+a_2p^{-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{-m}p^{-m}.$$

Kui numbrikohti pärast koma on lõpmata palju, siis kõneldakse *lõpmatust murrust*, vastasel korral *lõplikust murrust*. Iga lõplik murd on vaadeldav lõpmatu perioodilise murruna.

Näide. Arv $\frac{3}{2}$ avaldub kahendsüsteemis kujul $\frac{3}{2}=1{,}1000\ldots=1{,}1(0)$ või $\frac{3}{2}=1{,}0111\ldots=1{,}0(1)$ ning kümnendsüsteemis kujul $\frac{3}{2}=1{,}5000\ldots=1{,}5(0)$ või $\frac{3}{2}=1{,}4999\ldots=1{,}4(9)$ (art. 3.5.3).

Lõplikud murrud ja lõpmatud perioodilised murrud esitavad ratsionaalarve, lõpmatud mitteperioodilised irratsionaalarve.

Kümnendsüsteem pärineb Indiast, kust ta Kesk-Aasia rahvaste ja araablaste vahendusel jõudis Euroopasse.

3.1.3. **Rooma numbrid** moodustavad mittepositsioonilise arvusüsteemi, milles kasutatakse 7 numbrit: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000. Esimesed kümme arvu kirjutatakse järgmiselt:

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

Ka ülejäänud arvud kirjutatakse numbreid korrates. Kui seejuures väiksema väärtusega number asub suurema järel, siis numbrite väärtused liidetakse, vastupidisel juhul lahutatakse. Enam kui kolm korda järjest üht numbrit ei kirjutata.

Näiteid. XXVI=26, CCCX=310, MCMLXXVIII=1978.

3.2. ARVUTUSOPERATSIOONID

3.2.1. **Aritmeetilised tehted.** Aritmeetika **põhioperatsioonid** on **liitmine, lahutamine, korrutamine** ja **jagamine.**

Arvude a ja b liitmisel (sümboleis $a+b$) nimetatakse arve a ja b **liidetavaiks** ning tehte tulemust **summaks.**

Arvude a ja b lahutamisel (sümboleis $a-b$) nimetatakse arvu a **vähendatavaks,** arvu b **vähendajaks** ning tehte tulemust **vaheks.**

Arvude a ja b korrutamisel (sümboleis $a\cdot b$ või $a\times b$) nimetatakse arve a ja b **tegureiks** ning tehte tulemust **korrutiseks.**

Arvude a ja b ($b\neq0$) jagamisel (sümboleis $a:b$ või $\frac{a}{b}$) nimetatakse arvu a **jagatavaks,** arvu b **jagajaks** ning tehte tulemust **jagatiseks.**

Lahutamine on liitmise ning jagamine korrutamise **pöördtehe.**

3.2.2. **Arvutusseadused.** Arvuhulkades **N, Z, Q, R** ja

C kehtivad järgmised seadused, mida nimetatakse **aritmeetika põhiseadusteks.**

I *Liitmine on kommutatiivne:*

$$a+b=b+a.$$

II *Liitmine on assòtsiatiivne:*

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

III *Korrutamine on kommutatiivne:*

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

IV *Korrutamine on assotsiatiivne:*

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

V Liitmist ja korrutamist seob *distributiivsuse seadus:*

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Lisaks neile viiele kasutatakse arvutamisel järgmisi põhiseadustest tulenevaid arvutusseadusi.

1. $(a+b)-c=(a-c)+b$ või $(a+b)-c=a+(b-c)$.
2. $a-(b+c)=(a-b)-c$ või $a-(b+c)=(a-c)-b$.
3. $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$.
4. $a\cdot(b:c)=(a\cdot b):c$.
5. $(a+b):c=a:c+b:c$.
6. $(a-b):c=a:c-b:c$.
7. $(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b$ või $(a\cdot b):c=a\cdot(b:c)$.
8. $a:(b\cdot c)=(a:b):c$ või $a:(b\cdot c)=(a:c):b$.
9. $(c\cdot a):(c\cdot b)=a:b$.

Igaüks seadustest 1.—9. kehtib vaid siis, kui vaadeldavas arvuhulgas eksisteerivad vastavad vahed ja jagatised. Nulliga ei saa jagada üheski arvuhulgas.

3.2.3. Tehete järjekord arvutamisel on määratud järgmise ***reegliga:***

esmalt korrutatakse ja jagatakse, seejärel liidetakse ja lahutatakse. Kui esinevad ka sulud, siis tehakse antud järjekorras kõigepealt sulgudes olevad tehted.

Näiteid.

1) $13-16:2+6\cdot3=13-8+18=23$;

2) $[74-(6\cdot2-9)\cdot(8+2)]:(12-4\cdot2)=[74-(12-9)\cdot10]:(12-8)=(74-3\cdot10):4=44:4=11$.

3.3. NATURAALARVUD

3.3.1. Naturaalarvu mõiste ja omadused. Naturaalarvud on tekkinud esemete loendamise vajadusest. **Naturaalarvudena** mõistame arve

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Iga kahe naturaalarvu a ja b korral kehtib alati üks kolmest seosest: kas $a=b$, $a<b$ või $a>b$. Kõige väiksem naturaalarv on 0. Paigutades kõik naturaalarvud kasvamise järjekorras, saame **naturaalarvude jada** (1).

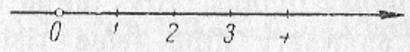
Naturaalarvude jada on lõpmatu (igale arvule naturaalarvude jadas järgneb veel naturaalarve). Arvule n järgnevad naturaalarvud $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... Naturaalarvude hulka tähistame sümboliga **N**.

On käsitlusi, kus arvu 0 ei loeta naturaalarvuks.

Igal naturaalarvul (v. a. arv 0) on kaks naaberarvu.

Naturaalarve saame kujutada sirge punktidena (joon. 3.1).

Naturaalarvud moodustavad poolrühma (art. 2.3.2.) nii liitmise kui ka korrutamise suhtes.



Joon. 3.1

3.3.2. Jäägiga jagamine. Öeldakse, et arv a jagub arvuga b, kui leidub naturaalarv c, nii et $c\cdot b=a$. Kui niisugust arvu c ei leidu (näiteks $a=17$ ja $b=5$ korral), siis kasutatakse jäägiga jagamise mõistet. Arvude a ja b jäägiga jagamine tähendab niisuguse naturaal-

arvu c leidmist, mille korral kehtib seos

$$a = c \cdot b + d, \text{ kus } d < b.$$

Arvu c nimetatakse sel juhul jagatiseks ja arvu d jääk.

Näide. $43768 : 163 = 268$ (jääk 84).

3.3.3. Alg- ja kordarvud. Iga nullist erinev naturaalarv jagub lõpliku hulga arvudega.

Def. Ühest suuremat naturaalarvu, mis jagub vaid ühe ja iseendaga, nimetatakse **algarvuks,** kõiki ülejäänud ühest suuremaid arve **kordarvudeks.**

Algarvud on 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 jne. Juba Eukleides (elas III saj. e.m.a.) näitas, et *algarvude hulk on lõpmatu.*

3.3.4. Arvude jaguvuse tunnused. Arvu **ristsummaks** nimetatakse tema numbrite summat.

Näiteid. 1. Arvu 74 ristsumma on $7+4=11$.
2. Arvu 30450 ristsumma on $3+4+5=12$.

Arvuga **2** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 2-ga parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga 0, 2, 4, 6, või 8.

Arvuga **3** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 3-ga parajasti siis, kui selle arvu ristsumma jagub 3-ga.

Arvuga **4** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 4-ga parajasti siis, kui tema kahest viimasest numbrist moodustuv arv jagub arvuga 4.

Arvuga **5** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 5-ga parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga 5 või 0.

Arvuga **6** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 6-ga parajasti siis, kui ta on paarisarv ning tema ristsumma jagub arvuga 3.

Arvuga **8** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 8-ga parajasti siis, kui tema viimasest kolmest numbrist moodustuv arv jagub arvuga 8.

Arvuga **9** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 9-ga parajasti siis, kui tema ristsumma jagub arvuga 9.

Arvuga **10** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 10-ga parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga 0.

Arvuga **25** *jaguvuse tunnus.* Arv jagub 25-ga parajasti siis, kui ta kaks viimast numbrit on nullid või moodustavad arvu 25, 50 või 75.

Seoses arvude jaguvusega pakuvad huvi veel järgmised tunnused.

1. Kui liidetavad jaguvad ühe ja sama arvuga, siis ka summa jagub selle arvuga.
2. Kui üks liidetav jagub mingi arvuga ja teine ei jagu, siis summa ei jagu selle arvuga.
3. Kui korrutise üks tegur jagub mingi arvuga, siis ka korrutis jagub selle arvuga.
4. Kui vähendatav ja vähendaja jaguvad mingi arvuga, siis jagub ka vahe selle arvuga.

3.3.5. Kordarvu lahutamine algtegureiks. Arvu esitamist algarvuliste tegurite korrutisena nimetatakse **algtegureiks lahutamiseks.** Kui esineb võrdseid algtegureid, siis kasutatakse astme mõistet.

Näiteid.

60	2		195	3		342	2
30	2		65	5		171	3
15	3		13	13		57	3
5	5		1			19	19
1			$195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$			1	
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$						$342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$	

3.3.6. Arvude suurim ühistegur. Arvu a **tegureiks** nimetatakse kõiki naturaalarve, millega jagub arv a. Arvu iga tegur on kas selle arvu algtegur või algtegurite korrutis.

Antud arvude **ühisteguriteks** nimetatakse arve, millega jaguvad kõik antud arvud.

Def. Antud arvude **suurimaks ühisteguriks** nimetatakse suurimat arvu, millega jagub igaüks antud arvudest.

Kui arvude suurim ühistegur on 1, siis neid arve nimetatakse **ühistegurita arvudeks.** Arvude suurimat ühistegurit võib leida järgmiste reeglite järgi.

I reegel. Arvude suurima ühisteguri leidmiseks lahutatakse kõik need arvud algtegureiks ja kirjutatakse välja algtegurid, mis on ühised kõikidele antud arvudele. Nende algtegurite astendajateks võetakse vastava algteguri

vähim astendaja, mis esineb vaadeldavate arvude algtegureiks lahutustes. Saadud astmete korrutis ongi suurim ühistegur.

Näide. Arvude $1092=2^2\cdot3\cdot7\cdot13$, $540=2^2\cdot3^3\cdot5$ ja $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ suurim ühistegur

$$S(1092;\ 540;\ 360)=2^2\cdot3=12.$$

II reegel (Eukleidese algoritm). Kahe arvu suurima ühisteguri leidmiseks jagatakse suurem arv väiksemaga, seejärel jagaja jäägiga, uuesti jagaja jäägiga jne., kuni jääk on 0. Viimane nullist erinev jääk ongi nende arvude suurim ühistegur.

Näiteid. Leida järgmiste arvupaaride suurim ühistegur:
420 ja 252, 453 ja 56.

420	252
252	1

252	168
168	1

168	84
168	2
0	

453	56
448	8

56	5
55	11

5	1
5	5
0	

Seega on arvude 420 ja 252 suurim ühistegur 84, arvud 453 ja 56 on ühistegurita.

III reegel. Kolme ja enama arvu suurima ühisteguri leidmiseks Eukleidese algoritmi abil leitakse mingi kahe arvu suurim ühistegur. Seejärel leitakse saadud suurima ühisteguri ja mingi kolmanda arvu suurim ühistegur. Viimasele leitakse suurim ühistegur neljanda arvuga jne., kuni on ammendatud kõik antud arvud. Viimase paari suurim ühistegur on siis antud arvude suurimaks ühisteguriks.

3.3.7. **Arvude vähim ühiskordne.** Antud arvude **ühiskordseteks** nimetatakse arve, mis jaguvad iga antud arvuga.

Def. Antud arvude **vähimaks ühiskordseks** nimetatakse vähimat nullist erinevat arvu, mis jagub iga antud arvuga.

Vähima ühiskordse leidmiseks kirjutatakse antud arvud

algtegurite astmete korrutistena. Saadud astmete hulgast valitakse välja kõigi erinevate algarvude suurima astendajaga astmed ja leitakse nende korrutis.

Näide. Leida arvude 360, 140 ja 35 vähim ühiskordne.
Et $360=2^3\cdot3^2\cdot5$, $140=2^2\cdot5\cdot7$ ja $35=5\cdot7$,
siis vähim ühiskordne

$$V(360;\ 140;\ 35)=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2520.$$

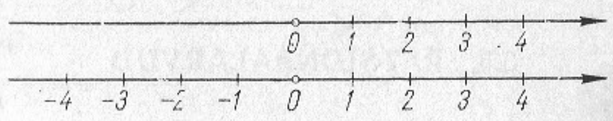
Vähima ühiskordse leidmisel on otstarbekas kasutada järgmist omadust.

Vähim ühiskordne on suurima arvu korrutis teiste arvude nende algteguritega, mis suurimas arvus ei esine.

Näide. Arvude 360, 140 ja 35 vähim ühiskordne on seega $360\cdot7=2520$.

3.4. TÄISARVUD

3.4.1. Täisarvu mõiste. Naturaalarvude hulk **N** muutub kinniseks lahutamise suhtes, kui seda täiendada arvude 1, 2, 3, ... vastandarvudega, mida tähistatakse sümbolitega -1, -2, -3, ... Neid nimetatakse **negatiivseteks täisarvudeks** ning kooskõlas sellega nullist erinevaid naturaalarve **positiivseteks täisarvudeks.** Arve a ja

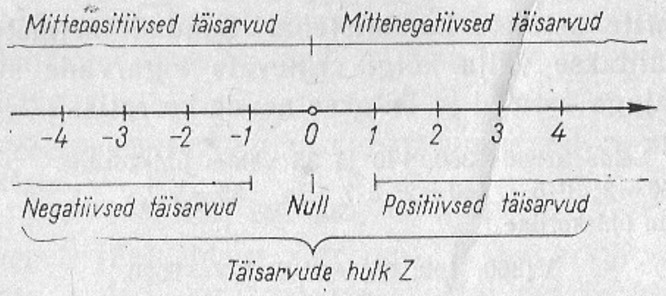


Joon. 3.2

$-a$ nimetatakse teineteise **vastandarvudeks**, neid kujutatakse arvsirgel sümmeetriliste punktidena nullpunkti suhtes (joon. 3.2). Kehtib seos $-(-a)=a$.

Kõigi täisarvude hulka tähistatakse sümboliga **Z** (joon. 3.3).

Tehted negatiivsete ja erimärgiliste täisarvudega defi-



Joon. 3.3

neeritakse samade eeskirjade kohaselt, mis on esitatud art. 3.5.2.

Kahest täisarvust loetakse suuremaks see, millele vastav punkt asub arvsirgel teisega võrreldes positiivses suunas (rõhtsirge korral paremal).

3.4.2. Täisarvude hulga omadusi

1. Täisarvude hulgas **Z** ei ole suurimat ega vähimat elementi.
2. Täisarvude hulk **Z** on kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes.
3. Täisarvude hulk **Z** on järjestatud hulk.
4. Täisarvude hulk **Z** on aditiivne Abeli rühm.
5. Täisarvude hulk **Z** on kommutatiivne ring.

3.5. RATSIONAALARVUD

3.5.1. Ratsionaalarvu mõiste. Kahe nullist erineva naturaalarvu a ja b jagatist nimetatakse **harilikuks murruks** ja kirjutatakse kujul $\frac{a}{b}$. Siinjuures nimetatakse arvu a selle **murru lugejaks** ning arvu b **nimetajaks.** Kui $a<b$, siis nimetatakse seda murdu **lihtmurruks,** $a\geqslant b$ korral **liigmurruks.** Harilikke murde, nende vastandarve ja arvu 0 nimetatakse ühiselt **ratsionaalarvudeks.** Ratsionaalarvude hulka tähistatakse sümboliga **Q**. Iga ratsionaalarv esitub

kujul $\frac{m}{n}$, kus m ja n on täisarvud ning $n\neq 0$. Selline esitus ei ole ühene.

Näiteid. 1) $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{24}{40}$; 2) $-\frac{8}{3}=\frac{-8}{3}=\frac{8}{-3}=\frac{64}{-24}$;

3) $-17=\frac{-17}{1}=\frac{17}{-1}$.

Kahest ratsionaalarvust loetakse suuremaks see, millele vastav punkt arvsirgel asub teisega võrreldes positiivses suunas (rõhtsirge korral paremal).

3.5.2. Tehted negatiivsete ja erimärgiliste arvudega sooritatakse järgmiste eeskirjade kohaselt.

Olgu $a>0$ ja $b>0$.

1. $(+a)+(-b)=a-b$, kui $a>b$.
2. $(+a)+(-b)=-(b-a)$, kui $a<b$.
3. $(-a)+(-b)=-(a+b)$.
4. $(+a)\cdot(-b)=(-a)\cdot(+b)=-(a\cdot b)$.
5. $(-a)\cdot(-b)=(+a)\cdot(+b)=a\cdot b$.
6. $(+a):(-b)=(-a):(+b)=-(a:b)$.
7. $(-a):(-b)=(+a):(+b)=a:b$.

Olgu a ja b suvalised.

8. $a+(-a)=0$.
9. $a+0=a$.
10. $a-b=a+(-b)$.

3.5.3. Ratsionaalarvude esitamine kümnendmurdudena. Iga ratsionaalarv esitub kas lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Lõpmatut kümnendmurdu, milles periood järgneb vahetult komale, nimetatakse **puhtperioodiliseks murruks**; kui periood ei järgne vahetult komale, siis **segaperioodiliseks.**

Näiteid. 1) $\frac{24}{125}=0{,}192$; 2) $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots=0{,}(6)$ (loe: *null koma 6 perioodis*);

3) $-\frac{223}{99}=-2,(25)$ (loe: *miinus 2 koma 25 perioodis*);

4) $\frac{131}{90}=1,4(5)$ (loe: *üks koma neli, viis perioodis*).

Iga perioodiline kümnendmurd on vaadeldav perioodi ees seisva lõpliku kümnendmurru ja lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada summana. See võimaldab *teisendada perioodilist kümnendmurdu harilikuks murruks.*

Näiteid.

1) $0,(3)=0,333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}$;

2) $-5,3(18)=-\left(5,3+\frac{18}{1000}+\frac{18}{100\,000}+\ldots\right)=$

$$=-\left(5\frac{3}{10}+\frac{\frac{18}{1000}}{1-\frac{1}{100}}\right)=-\left(5\frac{3}{10}+\frac{18}{1000-10}\right)=$$

$$=-\left(5\frac{3}{10}+\frac{2}{110}\right)=-5\frac{33+2}{110}=-5\frac{7}{22}.$$

On ka teine, hoopis lihtsam võimalus, mida näeme näitest.

Näide. Olgu $x=2,1(72)$. Siis

$$\begin{array}{r} 1000x=2172,(72) \\ -\quad 10x=\quad 21,(72) \\ \hline 990x=2151,\ 00 \end{array} \quad \text{ning} \quad x=\frac{2151}{990}=2\frac{19}{110}.$$

3.5.4. Positiivsete murdude võrdlemine. Positiivseid murde võrreldakse järgmiste r e e g l i t e alusel.

1. Kahest ühenimelisest murrust on suurem see, kumma lugeja on suurem.
2. Kahest võrdse lugejaga murrust on suurem see, kumma nimetaja on väiksem.
3. Murde, millel on erinevad nii nimetajad kui ka lugejad, teisendame selliselt, et saame rakendada üht eelmistest reeglitest.

Näide 1. Võrdleme murde $\frac{2}{7}$ ja $\frac{8}{27}$.

Selleks laiendame esimest murdu arvuga 4, saades $\frac{2}{7}=\frac{8}{28}$.

Reegli 2 põhjal $\frac{8}{27}>\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$.

Näide 2. Võrdleme murde $\frac{9}{14}$ ja $\frac{13}{21}$.

Teisendades murrud ühenimelisteks, saame

$$\frac{9}{14}=\frac{27}{42} \quad \text{ja} \quad \frac{13}{21}=\frac{26}{42},$$

millest reegli 1 põhjal $\frac{9}{14}>\frac{13}{21}$.

3.5.5. Ratsionaalarvude hulga omadusi

1. Ratsionaalarvude hulk **Q** on t i h e, s. t. iga kahe erineva ratsionaalarvu a ja b vahel asub lõpmata palju ratsionaalarve.
2. Ratsionaalarvude hulk **Q** on kommutatiivne korpus.
3. Ratsionaalarvude hulk on loenduv.

3.6. REAALARVUD

3.6.1. Reaalarvu mõiste. Ratsionaalarvude hulka **Q** laiendatakse mitteperioodiliste lõpmatute kümnendmurdude juurdevõtmisega.

Mitteperioodilisi lõpmatuid kümnendmurde nimetatakse **irratsionaalarvudeks.** Ratsionaal- ja irratsionaalarve nimetatakse ühiselt **reaalarvudeks.** Kõigi reaalarvude hulka tähistatakse sümboliga **R.** Igale reaalarvule vastab üks punkt arvsirgel ja vastupidi. Kahest reaalarvust loetakse suuremaks see, millele vastav punkt arvsirgel asub teisega võrreldes positiivses suunas (rõhtsirge puhul paremal).

Nullist suuremaid reaalarve nimetatakse positiivseteks, nullist väiksemaid negatiivseteks.

3.6.2. Reaalarvu absoluutväärtus defineeritakse seosega

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ kui } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ kui } a < 0. \end{cases}$$

Reaalarvu absoluutväärtus on sellele arvule vastava *punkti kaugus nullpunktist* arvsirgel.

Absoluutväärtuse o m a d u s i.

1. $|a| \geqslant 0$.
2. $|-a| = |a|$.
3. $a \leqslant |a|$, $-a \leqslant |a|$.
4. $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$.
5. $|a \pm b| \geqslant ||a| - |b||$.
6. $|ab| = |a|\,|b|$.
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$.
8. Vahe $a - b$ absoluutväärtus on võrdne arvude a ja b vastavate punktide vahelise kaugusega arvsirgel.

3.6.3. Reaalarvude hulga pidevus. Arvu M nimetatakse reaalarvude hulga X **ülemiseks tõkkeks,** kui $\forall\, x \in X$ korral $x \leqslant M$. Siis öeldakse, et hulk X on **ülalt tõkestatud.** Kui M on hulga X ülemine tõke, siis on seda ka iga arv $M_1 > M$.

Reaalarvude hulga X vähimat ülemist tõket nimetatakse selle hulga X **ülemiseks rajaks.**

Analoogiliselt nimetatakse arvu m hulga X **alumiseks tõkkeks,** kui $\forall\, x \in X$ korral $x \geqslant m$. Antud hulga suurimat alumist tõket nimetatakse selle hulga **alumiseks rajaks.**

Reaalarvude hulgas kehtib järgmine omadus, mida tuntakse ***pidevuse aksioomina.***

Igal ülalt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas ülemine raja, igal alt tõkestatud reaalarvude hulgal alumine raja.

Et reaalarvude korral kehtib pidevuse aksioom, siis nimetatakse reaalarvude hulka pidevaks.

Ratsionaalarvude hulk **Q** ei ole pidev, kuna ühegi mitteperioodilise lõpmatu kümnendmurru puuduga lähismurdude hulgal pole ülemist raja hulgas **Q**.

3.6.4. Tähtsamaid reaalarvude hulki. Mitmetele väga sageli esinevatele reaalarvude hulkadele on antud spetsiaalsed nimetused ja tähised.

Lõiguks $[a; b]$ nimetatakse kõigi nende reaalarvude x hulka, mille puhul $a \leqslant x \leqslant b$.

Vahemikuks $]a; b[$ nimetatakse kõigi nende reaalarvude x hulka, mille puhul $a < x < b$.

Poollõiguks $]a; b]$ nimetatakse kõigi nende reaalarvude x hulka, mille puhul $a < x \leqslant b$.

Poollõiguks $[a; b[$ nimetatakse kõigi nende reaalarvude x hulka, mille puhul $a \leqslant x < b$.

Nende reaalarvude x hulki, mis rahuldavad üht seostest 1) $a < x$, 2) $a \leqslant x$, 3) $x < b$ või 4) $x \leqslant b$, nimetatakse **poolsirgeks** ja tähistatakse vastavalt

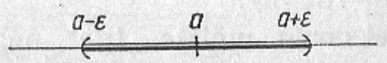
1) $]a; \infty[$, 2) $[a; \infty[$, 3) $]-\infty; b[$ ja 4) $]-\infty; b]$.

3.6.5. Reaalarvu ümbrus. Et reaalarvude ja arvsirge punktide vahel on üksühene vastavus, siis sageli kõneldakse reaalarvust kui punktist ning kasutatakse tema puhul geomeetrilist terminoloogiat.

Def. 1. Reaalarvu a **ümbruseks** (täpsemalt ε-ümbruseks) nimetatakse kõigi nende reaalarvude x hulka, mille puhul on rahuldatud võrratus $|x - a| < \varepsilon$, kus ε on suvaline (fikseeritud) positiivne arv.

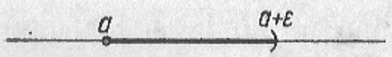
M ä r k u s. Võrratus $|x - a| < \varepsilon$ on samaväärne võrratuste ahelaga

$-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ ehk $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.



Joon. 3.4

Reaalarvu a ümbruseks (joon. 3.4) on seega iga vahemik, millele punkt a on keskpunktiks, s. t. vahemik $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$.



Joon. 3.5

Joon. 3.6

***Def.* 2.** Reaalarvu a **parempoolseks ümbruseks** (täpsemalt ε-ümbruseks) nimetatakse reaalarvude x hulka, mille puhul $0<x-a<\varepsilon$.

***Def.* 3.** Reaalarvu a **vasakpoolseks ümbruseks** (täpsemalt ε-ümbruseks) nimetatakse reaalarvude x hulka, mille puhul $0<a-x<\varepsilon$.

Reaalarvu a parempoolseks ümbruseks (joon. 3.5) on vahemik $]a;\ a+\varepsilon[$ ja vasakpoolseks (joon. 3.6) ümbruseks vahemik $]a-\varepsilon;\ a[$.

Reaalarvu ümbrus, vasak- ja parempoolne ümbrus on olulised mõisted, millele praegusajal rajanevad piirväärtuse mõiste ja funktsiooni pidevuse mõiste.

3.6.6. Reaalarvude hulga omadusi

1. Reaalarvude hulk **R** on korpus.
2. Reaalarvude hulk **R** on tihe.
3. Reaalarvude hulk **R** on pidev.
4. Reaalarvude hulk **R** on kontiinumi võimsusega hulk.

3.7. KOMPLEKSARVUD

Arvu mõiste laiendamise reaalarvudelt üldisematele arvudele tingib vajadus juurida mistahes arvu ning seega muuta lahenduvaiks need kõrgema astme võrrandid, millel reaalarvude hulgas **R** pole lahendeid (näit. $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$, $x^4+16=0$).

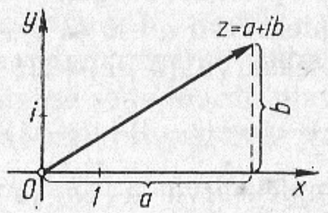
3.7.1. Kompleksarvu mõiste. Igat negatiivset arvu a saab esitada kujul $-1\cdot|a|$, seetõttu on ruutjuure leidmise operatsiooni laiendamiseks negatiivsetele arvudele vaja reaalarvude hulka täiendada sellise arvuga, mille ruut on -1.

***Def.* 1.** Arvu, mille ruut on -1, nimetatakse **imaginaarühikuks** ja tähistatakse sümboliga i, s. t. $i=\sqrt{-1}$.

Et uus arvuhulk oleks reaalarvude hulgast **R** laiem korpus (art. 2.3.5.), siis peab ta sisaldama ka arve ib ja $a+ib$, kus a ja b on reaalarvud.

***Def.* 2.** Arve kujul $a+ib$, kus a ja b on reaalarvud ning i imaginaarühik, nimetatakse **kompleksarvudeks.**

Reaalarvu a nimetatakse kompleksarvu $a+ib$ **reaalosaks** ja reaalarvu b selle kompleksarvu **imaginaarosaks.** Iga kompleksarv $z=a+ib$ on määratud oma reaal- ja imaginaarosaga, s. t. reaalarvude järjestatud paariga $(a;\ b)$. Sellise paariga on määratud ka tasandi punkt. Seega on vastavus tasandi punktide või nende kohavektorite ja kompleksarvude vahel üksühene. (joon. 3.7)



Joon. 3.7

Koordinaattasandit, kus kujutatakse kompleksarve, nimetatakse **komplekstasandiks.** Rõhttelge ehk x-telge nimetatakse **reaalteljeks,** püsttelge ehk y-telge **imaginaarteljeks.** Viimasel kujutuvaid arve nimetatakse **puhtimaginaararvudeks.** Kompleksarvuks 0 nimetatakse niisugust kompleksarvu, mille reaal- ja imaginaarosa on mõlemad nullid. Kõigi kompleksarvude hulka tähistatakse sümboliga **C**.

***Def.* 3.** Kaht kompleksarvu $z_1=a+ib$ ja $z_2=c+id$ nimetatakse **võrdseteks,** kui $a=c$ ja $b=d$.

Järeldus. $a+ib=0\Leftrightarrow a=0$ ja $b=0\Leftrightarrow a^2+b^2=0$.

***Def.* 4.** Kompleksarve $a+ib$ ja $a-ib$, mis erinevad vaid imaginaarosa märgi poolest, nimetatakse teineteise **kaaskompleksarvudeks.**

Kompleksarvu z kaaskompleksarvu tähistatakse sümboliga $\bar{z}$.

Kompleksarvude hulgas **C** lahenduvad kõik kõrgema astme võrrandid.

Näide. Lahendame võrrandid

1) $x^2+1=0$, 2) $x^2+6x+13=0$.

1) $x^2=-1$, $x=\pm\sqrt{-1}$, $x=\pm i$, $x_1=i$, $x_2=-i$;

2) $x^2+6x+13=0$, $x=-3\pm\sqrt{9-13}=-3\pm\sqrt{-4}$, $x_1=-3+2i$, $x_2=-3-2i$.

Omadus. Kui reaalarvuliste kordajatega kõrgema astme võrrandi lahendiks on mingi kompleksarv $a+ib$, siis on selle võrrandi lahendiks ka kaaskompleksarv $a-ib$.

3.7.2. Tehted kompleksarvudega.

Def. 1. Kahe kompleksarvu $a+ib$ ja $c+id$ ***summaks*** nimetatakse kompleksarvu $(a+c)+i(b+d)$.

Näide. $(2+3i)+(-4-i)=(2-4)+i(3-1)=-2+2i$.

Def. 2. Kahe kompleksarvu $a+ib$ ja $c+id$ **korrutiseks** nimetatakse kompleksarvu $(ac-bd)+i(ad+bc)$.

Kompleksarvude lahutamine ja jagamine defineeritakse kui liitmise ja korrutamise pöördoperatsioonid. Nende definitsioonide kohaselt

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d),$$

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, \quad \text{kus} \quad c^2+d^2\neq 0.$$

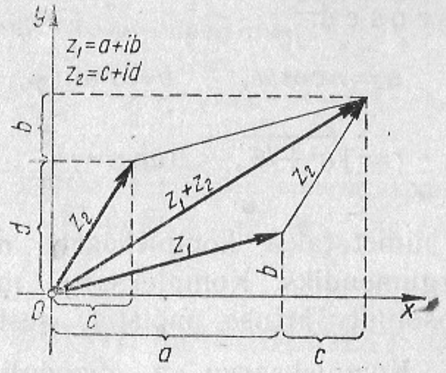
Tehete definitsioonidest järeldub järgmine ***reegel.*** Tehteid kompleksarvudega võib sooritada nagu tehteid kaksliikmetega, arvestades, et $i^2=-1$.

Näiteid.

1) $(-4+5i)\cdot 3i=-4\cdot 3i+5i\cdot 3i=-12i-15=-15-12i$;

2) $\frac{1+3i}{1+2i}=\frac{(1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1+3i-2i-3i\cdot 2i}{1^2-(2i)^2}=\frac{1+6+i}{1+4}=$

$=\frac{7+i}{5}=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$

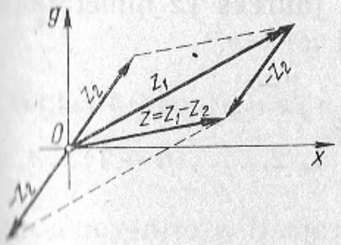


Joon. 3.8

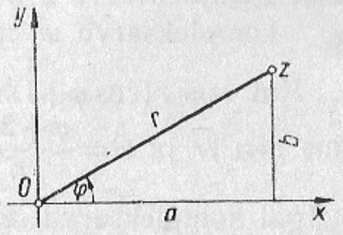
Kompleksarvude jagamise reegel:
kahe kompleksarvu jagamisel kirjutatakse jagatis murruna ning laiendatakse seda murdu nimetajas oleva kompleksarvu kaaskompleksarvuga. Nii vabanetakse imaginaarsusest nimetajas.

Kompleksarvude liitmist saab geomeetriliselt interpreteerida vektorite liitmisena (joon. 3.8) ja lahutamist vektorite lahutamisena (joon. 3.9). Kompleksarvude z_1 ja z_2 lahutamist võib vaadelda ka kui arvule z_1 arvu z_2 vastandarvu $-z_2$ liitmist (joon. 3.9).

3.7.3. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju. Kompleksarvu z kui punkti tasandil saab määrata ka arvupaariga $(r;\ \varphi)$, kus r on vastava punkti kaugus nullpunktist ja φ on nurk reaalteljest kuni kompleksarvule z vastava punkti kohavektorini (joon. 3.10).



Joon. 3.9



Joon. 3.10

Kehtivad seosed:

$$a=r\cos\varphi, \qquad b=r\sin\varphi,$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \tan\varphi=\frac{b}{a}.$$

Suurust r nimetatakse kompleksarvu **mooduliks** ning suurust φ **argumendiks.** Kompleksarvu moodul üldistab reaalarvu absoluutväärtuse mõistet, sest $b=0$ korral $r=\sqrt{a^2}=|a|$. Kompleksarvu z moodulit tähistatakse sümboliga $|z|$.

Esitades kompleksarvu $z=a+ib$ mooduli ja argumendi kaudu, saame kompleksarvu **trigonomeetrilise kuju**

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

Näide. Esitame kompleksarvu $1+\mathrm{i}$ trigonomeetrilisel kujul.

Et arvu $1+\mathrm{i}$ puhul $r=\sqrt{2}$ ja $\varphi=\frac{\pi}{4}$, siis

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kui $z_1=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)$ ja $z_2=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$, siis

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

$$(z_1)^m=(r_1)^m(\cos m\varphi_1+\mathrm{i}\sin m\varphi_1).$$

Def. Kompleksarvu z **n-nda astme juureks** $\sqrt[n]{z}$ nimetatakse kompleksarvu w, mille korral $w^n=z$.

Kui $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, siis $\sqrt[n]{z}=\varrho(\cos\Theta+\mathrm{i}\sin\Theta)$, kus $\varrho=\sqrt[n]{r}$ ja $\Theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Igal kompleksarvul $z\neq0$ on parajasti n erinevat n-nda astme juurt.

Näide. Et $-16=16(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$, siis

$$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \quad k=0, 1, 2, 3.$$

Arvutades saame juureks $\sqrt[4]{-16}$ neli erinevat kompleksarvu

$$\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2} \text{ ja } \sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

3.8. ARVU MÕISTE AJALOOLISEST ARENGUST

Kui positiivseid täisarve (naturaalarve) kasutas inimkond oma arengu algstaadiumis (vajadusest loendada esemeid, inimesi jne.), siis arvu mõiste üldistamiseks oli vaja jõuda teatavale arengutasemele. Ratsionaalarvu mõiste on seotud esemete osadeks jaotamisega. Ratsionaalarvude kasutamise kohta on andmeid perioodist enam kui 3000 aastat tagasi.

Negatiivsete arvude kasutamise kohta on teateid II sajandist e. m. a., hiina matemaatikute töödest. Euroopasse jõudsid negatiivsed arvud nähtavasti araablaste vahendusel Indiast. Neid hakati Euroopa matemaatikute hulgas laialdaselt kasutama alles pärast prantsuse matemaatiku R. Descartes'i (1596—1650) tööde ilmumist. Üksikuid irratsionaalarve tunti ja kasutati juba antiikajal. Seda mitmetest geomeetrilistest ülesannetest lähtudes. Reaalarvude matemaatiliselt korrektse käsitluse andsid XIX sajandi teisel poolel R. Dedekind (1831—1916), G. Cantor (1845—1918) ja K. Weierstrass (1815—1897).

Esimesed teated imaginaararvu kasutamisest ulatuvad XVI sajandisse. On teada, et 1545. a. avaldas itaalia matemaatik G. Cardano (1501—1576) töö, milles vaatles võrrandit $x^3-12x+16=0$. Lahendamisel kasutas ta avaldist $\sqrt{-243}$ ning leidis selle abil lahendid $x_1=x_2=2$, $x_3=-4$. Laialdaselt kasutas kompleksarve Peterburi Teaduste Akadeemia akadeemik L. Euler (1707—1783), kes muuhulgas võttis kasutusele sümboli i imaginaarühiku tähisena. Alles XVIII sajandi lõpul leiti kompleksarvude geomeetriline tõlgendus.

4. PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

4.1. JADA PIIRVÄÄRTUS

4.1.1. Jada piirväärtuse definitsioon

Def. 1. Arvu A nimetatakse **jada** (y_n) **piirväärtuseks,** kui selle jada liikmed y_n erinevad arvust A kuitahes vähe alates teatavast indeksist n.

Sümboleis:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad \text{ehk} \quad \lim y_n = A \quad \text{või ka} \quad y_n \to A.$$

Sümbol lim pärineb ladinakeelsest sõnast *limes*, s. t. piir.

Jada (y_n), millel eksisteerib piirväärtus, nimetatakse **koonduvaks,** vastasel juhul **hajuvaks.**

Näide. Veendume, et jada (y_n), kus $y_n = \frac{n+1}{n}$, piirväärtuseks on arv 1.

Et $y_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, siis arvude y_n ja 1 erinevus

$$|y_n - 1| = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Võtteks y_n ja A erinevuse määraks näiteks 0,01, saame näidata koha (jada elemendi indeksi), millest alates y_n ja 1 erinevad vähem kui 0,01. Selle koha leiame võrratusest

$$|y_n - 1| = \frac{1}{n} < 0{,}01.$$

Siit saame, et $n > \frac{1}{0{,}01} = 100$.

Seega nende indeksite n korral, mis on suuremad kui 100, erineb jada element y_n arvust 1 vähem kui 0,01 võrra.

Erinevuse määra tähistatakse üldiselt sümboliga ε, mis võib olla kuitahes väike positiivne arv. Ka suvalise erinevuse $\varepsilon > 0$ korral saame leida koha, millest alates

$$|y_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Nimelt, viimane võrratus kehtib nende indeksite n korral, mis on suuremad kui $\frac{1}{\varepsilon}$, s. t. $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Näide. Vaatleme jada $(y_n) = ((-1)^n)$.

Selle jada liikmeteks on vaheldumisi arvud 1 ja -1. Seetõttu ei saa leiduda ühtki arvu A, et selle jada kõik liikmed alates mingist indeksist erineksid arvust A vähem kui näiteks 0,3 võrra. Vaadeldav jada on hajuv.

Jada piirväärtuse ülalesitatud definitsioon on matemaatiliselt korrektsem järgmistes sõnastustes.

Def. 2. Arvu A nimetatakse **jada** (y_n) **piirväärtuseks,** kui vastavalt igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub niisugune indeks $N(\varepsilon)$, et

$$|y_n - A| < \varepsilon \quad \text{iga} \quad n > N(\varepsilon) \text{ korral.}$$

Def. 3. Arvu A nimetatakse **jada** (y_n) **piirväärtuseks,** kui arvu A iga ümbruse U korral leidub niisugune koht (indeks), pärast mida jada (y_n) kõik liikmed kuuluvad ümbrusse U.

4.1.2. Jada piirväärtuse omadusi. Jada (y_n) nimetatakse **kasvavaks (kahanevaks),** kui iga indeksi n puhul $y_n \leqslant y_{n+1}$ $(y_n \geqslant y_{n+1})$. Kasvavaid ja kahanevaid jadasid nimetatakse koos **monotoonseteks jadadeks.** Kui iga n korral $y_n < y_{n+1}$ $(y_n > y_{n+1})$, siis nimetatakse jada (y_n) **rangelt kasvavaks (rangelt kahanevaks).** Rangelt kasvavaid ja rangelt kahanevaid jadasid nimetatakse ühiselt **rangelt monotoonseteks jadadeks.**

Jada (y_n) nimetatakse **tõkestatuks,** kui leidub konstant $M > 0$, et iga n korral kehtib võrratus $|y_n| \leqslant M$.

Järjestusega seotud piirväärtuse *omadusi.*

1. Igal monotoonsel ja tõkestatud jadal eksisteerib piirväärtus.
2. Kui jadadel (y_n) ja (z_n) eksisteerivad piirväärtused ning iga n korral kehtib seos $y_n \leqslant z_n$, siis ka

$$\lim_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Märkus. Rangest võrratusest $y_n<z_n$ ei järeldu veel, et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n<\lim\limits_{n\to\infty} z_n$. See nähtub näitest, kus $y_n=-\frac{1}{n}$ ja $z_n=\frac{1}{n}$. Sel juhul $y_n<z_n$, kuid $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$.

3. Kui jada (y_n) piirväärtus on nullist erinev, siis on selle jada kõik liikmed teatavast indeksist alates sama märgiga nagu piirväärtus.
4. Kui jadadel (y_n) ja (z_n) on ühine piirväärtus ning iga n korral $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$, siis

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} z_n.$$

5. Kui jadal (y_n) on olemas piirväärtus, siis see jada on tõkestatud, s. t. $\exists M>0$, et $|y_n|\leqslant M$ iga n korral.

Tehetega seotud piirväärtuse *omadusi.*

6. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, siis

$$\lim_{n\to\infty}(y_n+z_n)=\lim_{n\to\infty} y_n+\lim_{n\to\infty} z_n.$$

7. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, siis eksisteerib ka $\lim\limits_{n\to\infty} y_n z_n$ ning

$$\lim_{n\to\infty} y_n z_n=\lim_{n\to\infty} y_n \lim_{n\to\infty} z_n.$$

8. Konstantse teguri võib tuua piirväärtuse märgi ette:

$$\lim_{n\to\infty} cy_n=c\lim_{n\to\infty} y_n.$$

9. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, siis eksisteerib ka $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-z_n)$ ning

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-z_n)=\lim_{n\to\infty} y_n-\lim_{n\to\infty} z_n.$$

10. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ ning

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n\neq 0$, siis eksisteerib ka $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{z_n}$ ning

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{z_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}.$$

4.2. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS

4.2.1. Funktsiooni piirväärtuse definitsioon

Def. 1. Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks kohal (punktis) a,** kui selle funktsiooni väärtused $f(x)$ erinevad arvust A kuitahes vähe kõigi x väärtuste korral, mis on küllalt lähedal kohale a.

Sümboleis:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ehk ka

$$f(x)\to A, \quad \text{kui} \quad x\to a.$$

Näide. Veendume, et funktsiooni $y=5x-4$ piirväärtus kohal 2 on 6.

Antud juhul $a=2$, $A=6$ ja $f(x)=5x-4$. Nõuame, et y ja 6 ei erineks, näiteks, mitte rohkem kui 0,05 võrra, s. t.

$$|y-6|=|(5x-4)-6|=|5x-10|<0{,}05.$$

Arvestades absoluutväärtuse omadusi, saame siit, et see võrratus on rahuldatud, kui

$$5|x-2|<0{,}05$$

ehk

$$|x-2|<0{,}01.$$

Viimast võrratust rahuldavad need muutuja x väärtused, mis erinevad arvust 2 vähem kui 0,01. Seega saimegi, et antud funktsiooni väärtused erinevad arvust 6 vähem kui 0,05 kõigi nende muutuja x väärtuste korral, mis asuvad kohale 2 lähemal kui 0,01.

Analoogilise tulemuse saaksime, kui võtaksime 0,05 asemel suvalise erinevuse määra ε. Seega võime öelda, et arv 6 on antud funktsiooni piirväärtuseks kohal 2.

Matemaatiliselt korrektsemate definitsioonidena kasutatakse tänapäeval peamiselt järgmisi.

Def. 2 (Cauchy definitsioon $\varepsilon-\delta$ keeles). Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks kohal a,**

kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub niisugune arv $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, et võrratus

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

kehtib alati, kui

$$0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$$

ning x kuulub funktsiooni f määramispiirkonda.

Def. 3 (Heine definitsioon jadade kaudu). Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks kohal a,** kui iga jada (x_n) korral, mille puhul x_n kuulub funktsiooni määramispiirkonda, $x_n\neq a$ ning $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, kehtib seos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

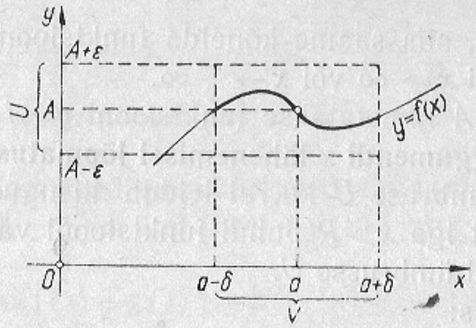
Näide. Veendume, et ei eksisteeri piirväärtus

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}.$$

Tõepoolest, kui võtta $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, siis $x_n\to 0$ ja $\cos\dfrac{1}{x_n}=\cos 2n\pi=1\to 1$. Kui aga võtta $x_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$, siis $x_n\to 0$, kuid $\cos\dfrac{1}{x_n}=\cos(2n+1)\pi=-1\to -1$. Seega ei leidu niisugust arvu A, et $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=A$ iga jada (x_n) puhul, mille korral $x_n\to 0$.

Def. 4 (definitsioon ümbruse mõiste kaudu). Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks kohal a,** kui arvu A iga ümbruse U puhul leidub arvu a niisugune ümbrus V, et argumendi x muutumisel ümbruses V, v. a. $x=a$, funktsiooni väärtused kuuluvad ümbrusse U (joon. 4.1).

4.2.2. Funktsiooni ühepoolne piirväärtus. Mõnedel juhtudel (näiteks kui punkt a on vaadeldava funktsiooni määramispiirkonna otspunkt) saame vaadelda argumendi x muutumist vaid koha a ühepoolses ümbruses. Arvu a vasakpoolset ümbrust tähistame sümboliga V^- ning parempoolset ümbrust V^+.



Joon. 4.2

Vaadeldes funktsiooni piirväärtuse definitsioonis argumendi ümbruse asemel ühepoolset ümbrust, saame ühepoolse piirväärtuse definitsiooni.

Def. 1. Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ vasakpoolseks piirväärtuseks kohal a,** kui arvu A iga ümbrus U korral leidub arvu a niisugune vasakpoolne ümbrus V^-, et argumendi x muutumisel ümbruses V^- funktsiooni väärtused kuuluvad ümbrusse U.

Sümboleis:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A$$

ehk ka

$$f(x)\to A,\ \text{kui}\ x\to a^-.$$

Def. 2. Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ parempoolseks piirväärtuseks kohal a,** kui arvu A iga ümbruse U korral leidub arvu a niisugune parempoolne ümbrus V^+, et argumendi muutumisel ümbruses V^+ funktsiooni väärtused kuuluvad ümbrusse U.

Sümboleis:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=A$$

ehk ka

$$f(x)\to A,\ \text{kui}\ x\to a^+.$$

4.2.3. Funktsiooni piirväärtus lõpmatuspunktis. Kui funktsiooni määramispiirkond sisaldab poolsirge $]b;\infty[$

või $]-\infty; b[$, siis saame kõnelda funktsiooni piirväärtusest juhul, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$.

Def. 1. Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks argumendi x lähenemisel lõpmatusele,** kui arvu A iga ümbruse U korral leidub niisugune positiivne arv R, et iga $x>R$ puhul funktsiooni väärtused $f(x)$ kuuluvad ümbrusse U.

Sümboleis:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

ehk ka

$$f(x) \to A, \text{ kui } x \to \infty.$$

Def. 2. Arvu A nimetatakse **funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks argumendi x lähenemisel miinus lõpmatusele,** kui arvu A iga ümbruse U korral leidub niisugune positiivne arv R, et iga $x<-R$ puhul funktsiooni väärtused kuuluvad ümbrusse U.

Sümboleis:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

ehk ka

$$f(x) \to A, \text{ kui } x \to -\infty.$$

4.2.4. Funktsiooni piirväärtuse omadusi. Funktsiooni piirväärtusel on samasugused omadused nagu jada piirväärtuselgi. Et nende omaduste sõnastus ei sõltu sellest, millist argumendi muutumist me vaatleme (kas $x \to a$, $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$ või $x \to -\infty$), siis sõnastame need omadused üldjuhu jaoks, mõistes sümbolina lim üht art. 4.2.1.—4.2.3. vaadeldud viiest piirväärtusest.

Omadused.

1. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$ ning $f(x) \leqslant g(x)$, siis ka

$$\lim f(x) \leqslant \lim g(x).$$

Märkus. Selles omaduses ei saa mitterangeid võrratusi asendada rangete võrratustega (vt. märkust art. 4.1.2).

2. Kui $\lim f(x)=\lim g(x)$ ning $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, siis

$$\lim h(x)=\lim f(x)=\lim g(x).$$

3. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, siis eksisteerib ka $\lim [f(x)+g(x)]$ ning

$$\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x).$$

4. Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, siis eksisteerib ka $\lim f(x)g(x)$ ning

$$\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x).$$

Märkus. Kahe funktsiooni korrutisel võib piirväärtus eksisteerida ka siis, kui ühel teguril piirväärtust pole. Kuigi ei eksisteeri $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$, on

$$\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x}=0,$$

sest

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|.$$

Niisugusel juhul ei saa korrutise piirväärtuse leidmiseks kasutada 4. omadust. Korrutisel võib olla piirväärtus ka siis, kui kummalgi teguril seda pole, näiteks $\lim (-1)^n(-1)^n=\lim (-1)^{2n}=\lim 1=1$. Analoogiline olukord on ka 3. omadusega ning omadustega 6 ja 7.

5. Kui eksisteerib $\lim f(x)$, siis iga konstandi c korral kehtib seos

$$\lim cf(x)=c\lim f(x).$$

6. Kui eksisteerivad $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, siis eksisteerib ka $\lim [f(x)-g(x)]$ ning

$$\lim [f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x).$$

7. Kui eksisteerivad $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ ja $\lim g(x) \neq 0$, siis eksisteerib ka $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

4.2.5. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine põhineb elementaarfunktsioonide pidevusel, nende omadustel ja art. 4.2.4. esitatud piirväärtuste omadustel.

Näiteid. 1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x^2-3}{2x^3-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \dfrac{1+0-0}{2-0} = \dfrac{1}{2};$

3) $\lim\limits_{x\to 0}[2^x - 4\cos x + 5\log(10-x)] =$
$= \lim\limits_{x\to 0} 2^x - 4\lim\limits_{x\to 0}\cos x + 5\lim\limits_{x\to 0}\log(10-x) =$
$= 2^0 - 4\cos 0 + 5\log(10-0) = 1 - 4 + 5 = 2.$

4.2.6. Lõpmatu piirväärtus: Mõnede küsimuste jaoks on kasulik üldistada piirväärtuse mõistet selliselt, et piirväärtuseks ei ole mitte kindel arv, vaid ∞ või $-\infty$. Sel juhul kõneldakse lõpmatust piirväärtusest.

Def. Öeldakse, et funktsioonil $y=f(x)$ on **lõpmatu piirväärtus** argumendi x lähenemisel kohale a, kui iga positiivse arvu M korral leidub koha a selline ümbrus V, et argumendi x muutumisel ümbruses V on rahuldatud võrratus $f(x) > M$ (või $f(x) < -M$).

Esimesel juhul öeldakse, et funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks on $+\infty$, teisel juhul $-\infty$.

Sümboleis: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Kirjutis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ tähendab seda, et $x \to a$ korral kasvavad antud funktsiooni väärtused kuitahes suureks, s. t. saavad suuremaks kui mistahes etteantud arv M.

Analoogiliselt defineeritakse lõpmatu piirväärtus ka juhtudel $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$, samuti jada (y_n) korral.

Näiteid. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

4.3. MÕNINGAID OLULISI PIIRVÄÄRTUSI

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a>0$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ iga α korral.

Neid piirväärtusi saab kasutada teiste piirväärtuste leidmisel.

Näide. Leida $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\tan x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}\cdot\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\cdot\frac{2^x-1}{x} =$$
$$= 1\cdot 1\cdot \ln 2 = \ln 2.$$

4.4. MÄÄRAMATUSED

Esineb olukordi, kus funktsiooni piirväärtuse arvutamisel ei saa kasutada piirväärtuse omadusi, näiteks jagatise $\frac{f(x)}{g(x)}$ piirväärtuse leidmine, kui $\lim f(x)=0$ ja $\lim g(x)=0$. Sellist juhtumit nimetatakse **määramatuseks.** Määramatusi on 7 tüüpi.

4.4.1. Määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Selliselt nimetatakse jagatise $\frac{f(x)}{g(x)}$ piirväärtust, kui $\lim f(x)=\lim g(x)=0$.

Piirväärtuse $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ leidmiseks püütakse vaadeldavat murdu taandada teguriga, mis piirile minnes annab nulli lugejas ja nimetajas.

Näide. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$.

4.4.2. Määramatus tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$. Selliselt nimetatakse jagatise $\frac{f(x)}{g(x)}$ piirväärtust, kui $\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$.

Niisuguse määramatusega kohtume eeskätt hulkliikmete jagatise piirväärtuse leidmisel, kui $x\to\infty$. Sel juhul jagatakse murru lugejat ja nimetajat muutuja x kõrgeima astmega.

Näide. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^2-4x^4}{x^5+3x^3-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^5}-\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^5}}=\frac{0-0-0}{1+0-0}=$

$=\frac{0}{1}=0.$

4.4.3. L'Hospitali reegel. Määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ korral saab jagatise piirväärtuse leidmiseks kasutada järgmist teoreemi, mida tuntakse l'Hospitali ***reeglina.***

Kui $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ või $\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$ ja eksisteerib piirväärtus $A=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siis

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Näiteid. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}$.

Saime uue sama tüüpi määramatuse. Veel kord l'Hospitali reeglit kasutades saame, et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Seega

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0.$$

4.4.4. Määramatus tüüpi $0\cdot\infty$. Selliselt nimetatakse piirväärtust $\lim f(x)\cdot g(x)$, kui $\lim f(x)=0$ ja $\lim g(x)=\infty$. Niisuguse piirväärtuse leidmisel teisendatakse antud korrutis jagatiseks seosega $f(x)\cdot g(x)=f(x):\frac{1}{g(x)}$ ning saadakse määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$. Analoogiliselt saaksime $0\cdot\infty$ taandada määramatusele tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$.

Näiteid. 1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=0.$

Kasutades funktsiooni piirväärtuse erinevaid definitsioone (art. 4.2.1.), võime saada esitatud definitsiooniga samaväärseid funktsiooni pidevuse definitsioone.

Def. 2. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **pidevaks kohal** a, kui selle funktsiooni väärtused $f(x)$ erinevad väärtusest $f(a)$ kuitahes vähe kõigi x väärtuste korral, mis on küllalt lähedal kohale a.

Def. 3. (Cauchy definitsioon $\varepsilon-\delta$ keeles). Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **pidevaks kohal** a, kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub niisugune arv $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, et võrratus

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

kehtib alati, kui

$$|x-a|<\delta(\varepsilon)$$

ning x kuulub funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda.

Def. 4. (Heine definitsioon jadade abil). Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **pidevaks kohal** a, kui iga jada (x_n) korral, mille puhul x_n kuulub antud funktsiooni määramispiirkonda ning $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, kehtib seos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a).$$

Märkus. Et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, siis viimase võrduse põhjal saame, et pideva funktsiooni $f(x)$ korral kehtib seos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Def. 5. (definitsioon ümbruse mõiste abil). Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **pidevaks kohal** a, kui arvu $f(a)$, iga ümbruse U puhul leidub arvu a niisugune ümbrus V, et argumendi x muutumisel ümbruses V funktsiooni väärtused kuuluvad ümbrusse U.

Def. 6. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **pidevaks kohal** a, kui lõpmata väikesele argumendi muudule Δx vastab lõpmata väike funktsiooni muut $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$. Kõrvuti mõistega «*pidevus kohal*

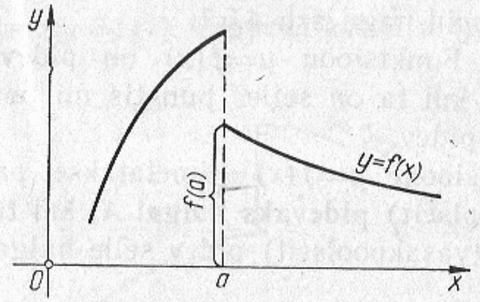
a» kasutatakse mõistet «*funktsiooni pidevus hulgal* X».

Def. 7. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **pidevaks hulgal** X, kui ta on pidev selle hulga igas punktis.

4.5.2. Funktsiooni ühepoolne pidevus

Def. 1. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **parempoolselt pidevaks kohal (punktis)** a, kui on täidetud järgmised tingimused:

1) eksisteerib $f(a)$;
2) eksisteerib $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ (joon. 4.3)

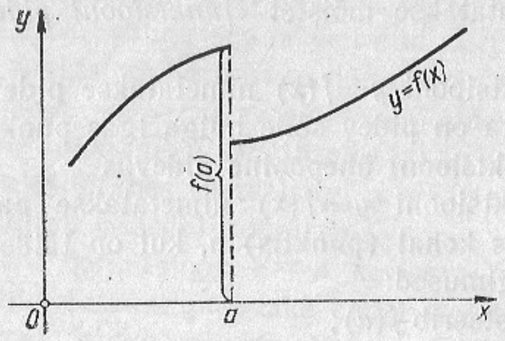


Joon. 4.3

Kasutades funktsiooni parempoolse piirväärtuse $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ definitsiooni erinevaid formuleeringuid, võime saada esitatud definitsiooniga samaväärsed definitsioonid analoogiliselt eelmise punkti definitsioonidega.

Def. 2. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **vasakpoolselt pidavaks kohal (punktis)** a, kui on täidetud järgmised tingimused:

1) eksisteerib $f(a)$;
2) eksisteerib $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ (joon. 4.4).



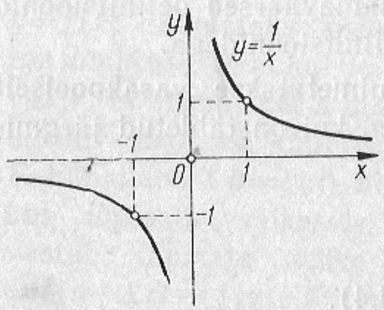
Joon. 4.4

Ka vasakpoolse pidevuse korral võime anda analoogilised definitsioonid nagu art. 4.5.1.

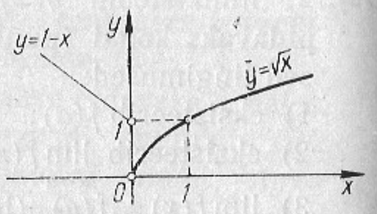
O m a d u s. Funktsioon $y=f(x)$ on pidev punktis a parajasti siis, kui ta on selles punktis nii parem- kui ka vasakpoolselt pidev.

Def. 3. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **parempoolselt (vasakpoolselt) pidevaks hulgal *X*,** kui ta on parempoolselt (vasakpoolselt) pidev selle hulga igas punktis.

4.5.3. Funktsiooni katkevuspunktid on niisugused punktid, kus antud funktsioon ei ole pidev, kuid on määratud nii vasak- kui ka parempoolses ümbruses. Katkevuspunkt võib mitte kuuluda funktsiooni määramispiirkonda, kuid võib olla ka määramispiirkonna punkt. Näiteks funktsioon



Joon. 4.5



Joon. 4.6

$y=\frac{1}{x}$ on katkev punktis $x=0$, sest see punkt ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda (joon. 4.5). Funktsioon

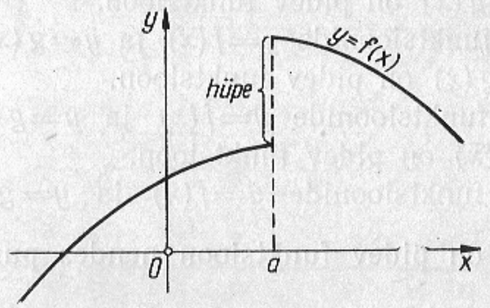
$$y=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

on küll määratud punktis $x=0$, kuid ei ole selles pidev (joon. 4.6).

Def. 1. Kui funktsioon $y=f(x)$ ei ole pidev kohal (punktis) a, kuid eksisteerivad parem- ja vasakpoolne piirväärtus kohal a, siis nimetatakse punkti a funktsiooni $y=f(x)$ **esimest liiki katkevuspunktiks** ning vahet

$$\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)$$

funktsiooni $y=f(x)$ **hüppeks kohal *a*** (joon. 4.7).



Joon. 4.7

N ä i d e. Joonisel 4.6 esitatud funktsioonile on punkt $x=0$ esimest liiki katkevuspunktiks, milles hüpe on -1.

Def. 2. Kui funktsiooni hüpe võrdub nulliga, siis nimetatakse vaadeldavat punkti antud funktsiooni **kõrvaldatavaks katkevuspunktiks.**

N ä i d e. Funktsioonil $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ on punktis $x=0$ kõrvaldatav katkevus. Seda funktsiooni saab muuta pidevaks punktis 0, kui defineerida $f(0)=1$.

Def. 3. Punkti nimetatakse antud funktsiooni **teist liiki katkevuspunktiks,** kui selles punktis ei eksisteeri vähemalt üks antud funktsiooni ühepoolsetest piirväärtustest.

Näide. Joonisel 4.5 esitatud funktsioonile $y=\frac{1}{x}$ on punkt $x=0$ teist liiki katkevuspunktiks.

4.6. PIDEVATE FUNKTSIOONIDE OMADUSI

4.6.1. Aritmeetiliste tehetega seotud omadusi

Olgu $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ pidevad funktsioonid kohal a (või hulgal X).

Omadusi.

1. Pidevate funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ summa $y=f(x)+g(x)$ on pidev funktsioon.
2. Pidevate funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ vahe $y=f(x)-g(x)$ on pidev funktsioon.
3. Pidevate funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ korrutis $y=f(x)g(x)$ on pidev funktsioon.
4. Pidevate funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ jagatis $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ on pidev funktsioon nendes punktides, kus jagaja $g(x)\neq 0$.

4.6.2. Liit- ja pöördfunktsiooni pidevus. Pidevatest funktsioonidest liit- ja pöördfunktsioonide moodustamisel kehtivad järgmised omadused.

1. *Liitfunktsiooni pidevus.* Liitfunktsioon $y=f[g(x)]$ on pidev punktis $x=a$, kui $u=g(x)$ on pidev punktis $x=a$ ning $y=f(u)$ on pidev punktis $b=g(a)$.
2. *Pöördfunktsiooni pidevus.* Lõigus $[a; b]$ pideva ja rangelt monotoonse funktsiooni $y=f(x)$ pöördfunktsioon on pidev lõigus otspunktidega $f(a)$ ja $f(b)$.

4.6.3. Lõigus pidevate funktsioonide omadusi

1. Weierstrassi ***teoreem.*** Lõigus pidev funktsioon on tõkestatud selles lõigus.

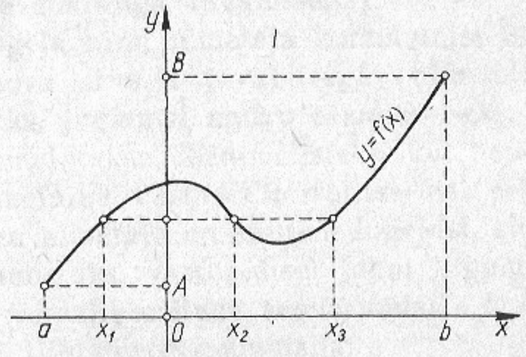
2. Weierstrassi ***teoreem.*** Lõigus pideval funktsioonil on suurim ja vähim väärtus selles lõigus.

Märkus. Nendes teoreemides ei saa eeldust «pidev lõigus» asendada pidevusega vahemikus või poollõigus.

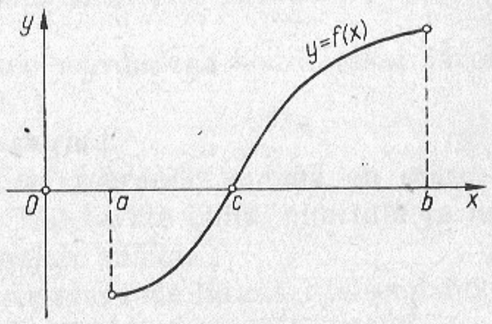
Näide. Funktsioon $y=\tan x$ on pidev vahemikus $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, kuid ta ei ole tõkestatud selles vahemikus, tal pole ka suurimat ega vähimat väärtust selles vahemikus.

3. Bolzano-Cauchy ***teoreem.*** Lõigus pidev funktsioon omab igat väärtust, mis paikneb selle funktsiooni vähima ja suurima väärtuse vahel (joon. 4.8).

Viimane teoreem on rakendatav järgmises sõnastuses:



Joon. 4.8



Joon. 4.9

Kui lõigus $[a; b]$ *pideva funktsiooni* $y=f(x)$ *korral on väärtused* $f(a)$ ja $f(b)$ *erineva märgiga, siis leidub koht* $c \in]a; b[$, *et* $f(c)=0$ joon. 4.9).

4.7. PIIRVÄÄRTUSE MÕISTE AJALOOST

Piirväärtuse mõiste esines esmakordselt XVII sajandi matemaatikas. Piirväärtuse teooria algeid leidus inglise füüsiku ja matemaatiku I. Newtoni (1643—1727) töödes. Piirväärtuse teooria loodi aga alles XIX sajandil. Suure panuse selleks andsid prantsuse matemaatik A. L. Cauchy (1789—1857) ning tšehhi matemaatik ja filosoof B. Bolzano (1781—1848). Täieliku matemaatilise ranguse saavutas piirväärtuse teooria XIX sajandi teisel poolel, mil R. Dedekind (1831—1916) ja G. Cantor (1845—1918) lõid reaalarvude teooria, mis võimaldas K. Weierstrassil (1815—1897) tõestada olulisi omadusi pidevate funktsioonide kohta (art. 4.6.3.).

5. ARITMEETIKA JA ELEMENTAARALGEBRA

5.1. TEHTED MURDUDEGA

5.1.1. Murru mõiste

$$\text{Murd} \quad \frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \leftarrow \textbf{murru lugeja} \\ \leftarrow \textbf{murrujoon} \\ \leftarrow \textbf{murru nimetaja} \end{matrix}$$

Murrujoonel on jagamismärgi tähendus.

Murru põhiomadus. Murru väärtus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga (avaldisega).

Murru lugeja ning nimetaja korrutamist ühe ja sama nullist erineva arvuga (avaldisega) nimetatakse **murru laiendamiseks,** jagamist **murru taandamiseks.**

Murde nimetatakse **ühenimelisteks,** kui nendel on ühesugused nimetajad, vastasel korral **ise-** ehk **erinimelisteks.**

Kui murru nimetaja on suurem lugejast, siis nimetame murdu **lihtmurruks,** vastupidisel juhul **liigmurruks.** Liigmurdu on võimalik esitada **segaarvuna,** s. t. oma täisosa ja murdosa (lihtmurru) summana.

Näide. $\frac{17}{5}=3+\frac{2}{5}=3\frac{2}{5}$.

Siin on 3 liigmurru täisosa ja $\frac{2}{5}$ murdosa.

5.1.2. Tehted murdudega sooritatakse järgmiste eeskirjade kohaselt.

Liitmise eeskirjad.

1. Ühenimeliste murdude summa on murd, mille nimetajaks on liidetavate ühine nimetaja ja lugejaks liidetavate lugejate summa.
2. Isenimeliste murdude liitmisel teisendatakse need murrud laiendamise teel ühenimelisteks ja seejärel liidetakse kui ühenimelised murrud.

3. Segaarvude liitmisel liidetakse eraldi täisosad ja murdosad ning tulemused liidetakse.

Näide. $4\frac{3}{5}+5\frac{2}{3}=(4+5)+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)=9+\left(\frac{9}{15}+\frac{10}{15}\right)=$

$=9+\frac{19}{15}=9+1\frac{4}{15}=10\frac{4}{15}$.

Lühiduse mõttes kirjutatakse seda järgmiselt:

$$4\frac{3}{5}+5\frac{2}{3}=9\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=9\frac{9+10}{15}=10\frac{4}{5}.$$

Lahutamise eeskirjad.

1. Ühenimeliste murdude lahutamisel lahutatakse vähendatava lugejast vähendaja lugeja ning saadakse vahe lugeja; vahe nimetajaks on antud murdude ühine nimetaja.
2. Isenimeliste murdude lahutamisel teisendatakse need murrud ühenimelisteks ja seejärel lahutatakse kui ühenimelised murrud.
3. Segaarvude lahutamisel lahutatakse eraldi täisosad ja murdosad ning tulemused liidetakse. Kui vähendataval murdosa puudub või see on väiksem vähendaja murdosast, siis võetakse täisosast 1 üheline ning teisendatakse see vähendatava murdosaks, saades viimase murdosa liigmurruna.

Näide. $7\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}=(7-3)+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)=4+\left(\frac{4}{12}-\frac{9}{12}\right)=$

$=3+\left(\frac{16}{12}-\frac{9}{12}\right)=3+\frac{7}{12}=3\frac{7}{12}$.

Lühiduse mõttes kirjutatakse seda järgmiselt:

$$7\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}=4\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=4\frac{4-9}{12}=3\frac{16-9}{12}=3\frac{7}{12}.$$

Korrutamise eeskirjad.

1. Kahe hariliku murru korrutamisel korrutatakse nende murdude lugejad omavahel ja nimetajad omavahel.

Näide. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot5}{3\cdot4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

2. Segaarvude korrutamisel teisendatakse need enne liigmurdudeks ja seejärel korrutatakse.

Näide. $1\frac{3}{4}\cdot2\frac{2}{7}=\frac{7}{4}\cdot\frac{16}{7}=\frac{7\cdot16}{4\cdot7}=4$.

3. Täisarvu ja hariliku murru korrutamisel korrutatakse murru lugeja antud täisarvuga.

Näide. $5\cdot\frac{2}{7}=\frac{5\cdot2}{7}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$.

4. Täisarvu ja segaarvu korrutamisel korrutatakse selle täisarvuga nii segaarvu täisosa kui ka murdosa ning tulemused liidetakse.

Näide. $2\cdot3\frac{5}{6}=2\cdot\left(3+\frac{5}{6}\right)=6+\frac{5}{3}=7\frac{2}{3}$.

Märkus. Viimast eeskirja on kasulik rakendada ka segaarvu korrutamisel lihtmurru või teise segaarvuga.

Näiteid. 1) $3\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\left(3+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}=2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$;

2) $4\frac{2}{5}\cdot5\frac{1}{4}=\left(4+\frac{2}{5}\right)\left(5+\frac{1}{4}\right)=20+2+1+\frac{1}{10}=23\frac{1}{10}$.

Murru $\frac{a}{b}$ pöördarvuks nimetatakse murdu $\frac{b}{a}$.

Jagamise eeskirjad.

1. Harilike murdude jagamisel tuleb jagatav korrutada jagaja pöördarvuga.
2. Segaarvude jagamisel tuleb arvud teisendada enne liigmurdudeks ning seejärel jagada.
3. Hariliku murru jagamisel täisarvuga tuleb antud murru nimetaja korrutada täisarvuga.

5.2. LIGIKAUDSED ARVUD

5.2.1. Arvude ümardamine. Arve ümardatakse järgmise reegli kohaselt.

Kui ümardatava kümnendarvu nullidega asendatav osa algab numbritega 0, 1, 2, 3, või 4, siis jäetakse säilitatavad tüvekohad muutmata, kui aga numbritega 5, 6, 7, 8 või 9, siis suurendatakse viimast säilitatavat tüvekohta ühe võrra.

Näiteid. Ümardame arvud 1,119; 7,449; 3,986; 2,25007; 15,75 kümnendikeni. Saame 1,1; 7,4; 4,0; 2,3; ja 15,8.

Antud näites on arvud esitatud ühekohalise täpsusega. Kui võtame kaks kohta pärast koma, siis kõneleme kahekohalisest täpsusest jne.

5.2.2. Ligikaudse arvu viga ja vea ülemmäär. Praktilistes ülesannetes kasutame arve, mis on saadud mõõtmise teel. Need iseloomustavad antud suurust vaid ligikaudselt, erinedes täpsest suurusest teatava vea võrra.

Täpse arvu A ja tema ligikaudse väärtuse ehk lähendi a korral nimetatakse **lähendi veaks** suurust $|A-a|$. Tavaliselt me täpset arvu A ei tea, seega pole teada ka lähendi viga. Saab aga hinnata, millist arvu lähendi viga ei ületa. Viimast nimetatakse lähendi **vea ülemmääraks** ehk **absoluutseks veaks.**

Arvu x absoluutset viga märgitakse sümboliga Δx või ka δx. Kui arvu A lähendi a vea ülemmäär on α, siis seda märgitakse järgmiselt: $A=a(\pm\alpha)$.

Ümardatud arvude korral võrdub vea (ümardamisvea) ülemmäär ümardamisel ära jäetud kõrgeima järgu 5 ühikuga (art. 5.2.1.).

Kehtivad järgmised omadused.

1. Ligikaudsete arvude summa absoluutne viga võrdub liidetavate absoluutsete vigade summaga.
2. Ligikaudsete arvude vahe absoluutne viga võrdub vähendatava ja vähendaja absoluutsete vigade summaga.

5.2.3. Relatiivne ehk suhteline viga. Ligikaudse arvu absoluutse vea (vea ülemmäära) ja selle arvu absoluutväärtuse jagatist nimetatakse ligikaudse arvu **relatiivseks ehk suhteliseks veaks.** Sümboleis: $\frac{\Delta a}{|a|}$. Relatiivset viga väljendatakse tavaliselt protsentides.

Näide 1. Olgu mõõtmistulemuseks $x=42(\pm 0{,}5)$ cm. Sel juhul relatiivne viga

$$\frac{\Delta x}{|x|}=\frac{0{,}5}{42}=0{,}0119\ldots\approx 1{,}2\%.$$

Näide 2. Olgu mingi keha temperatuuri mõõtmisel saadud $t=-19{,}3(\pm 0{,}05)^0$. Sel juhul relatiivne viga

$$\frac{\Delta t}{|x|}=\frac{0{,}05}{19{,}3}=0{,}0026\ldots\approx 0{,}3\%.$$

Ligikaudsete arvude korrutamisel ja jagamisel kehtivad järgmised omadused.

1. Korrutise relatiivne viga on võrdne tegurite relatiivsete vigade summaga.
2. Jagatise relatiivne viga on võrdne jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga.

5.2.4. Ligikaudsete arvude kirjutamine. Ligikaudne arv kirjutatakse sageli nii, et tema kõik numbrid on õiged. Viga ei ületa sel juhul arvu viimase, madalaima järgu poolt ühikut. Siis viga ei märgita ning öeldakse, et ligikaudne arv on kirjutatud **standardkujul.**

Näide. Standardkujul kirjutatud arvude 13,54; 281 ja 51,0 vigade ülemmäärad on vastavalt 0,005; 0,5 ja 0,05.

Ligikaudse **kümnendmurru tüvenumbriteks** nimetatakse selle arvu kõiki numbreid, välja arvatud arvu alguses olevad nullid.

Ligikaudse **täisarvu tüvenumbriteks** nimetatakse selle arvu kõiki numbreid, välja arvatud kahtlasest numbrist paremale poole jäävad nullid.

Kümnendmurru lõpus olevad nullid kuuluvad alati tüvenumbrite hulka, sest vastasel juhul neid ei kirjutataks.

Näide. Arvul 207 on kolm tüvenumbrit, arvul 0,031 on kaks tüvenumbrit; arvul 1,010 on neli tüvenumbrit.

Igapäevastes arvutustes kasutatakse sageli järgmisi, akadeemik A. N. Krõlovi (1863—1945) poolt antud ***eeskirju.***

1. Ligikaudne arv kirjutatakse nii, et temas oleksid kõik numbrid õiged, välja arvatud viimane, mis võib õigest erineda.
2. Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel tuleb tulemuses säilitada nii palju kümnendkohti, kui palju on neid vähima kümnendkohtade arvuga lähtearvus.
3. Ligikaudsete arvude korrutamisel ja jagamisel tuleb tulemuses säilitada nii palju tüvenumbreid, kui palju on neid vähima tüvenumbrite arvuga lähtearvus.

5.2.5. Arvutamine ligikaudsete arvudega. Arvutamist ligikaudsete arvudega kergendavad järgmised ***reeglid.***

1. Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel võib lähteandmeid enne ümardada nii, et viimane tüvenumber neis oleks ühe järgu võrra madalam kui tulemuse madalaim järk.
2. Suurema tüvenumbrite arvuga arvud võib enne korrutamist ja jagamist ümardada nii, et neisse jääks üks tüvenumber rohkem, kui on vastuses vaja säilitada.

Märkus. Seda täiendavalt säilitatavat numbrit nimetatakse **varunumbriks.** Pikemates arvutustes (näiteks paljude arvude liitmisel) on soovitav säilitada 2 varunumbrit.

Näide 1. Liita ligikaudsed arvud 17,25; 5,643 ja 30. Et viimases arvus ei ole kohti pärast koma, siis ka summas pole mõtet säilitada kohti pärast koma. Seetõttu ümardame liidetavad kuni esimese kohani pärast koma. Liidame arvud 17,2; 5,6 ja 30. Tulemuse 52,8 ümardame ühelisteni; antud ligikaudsete arvude summa on seega 53.

Näide 2. Leida arvude 20,528 ja 0,32 korrutis.

Et teises teguris on vaid kaks tüvenumbrit, siis korrutises säilitame kaks tüvenumbrit. Reegli 2 kohaselt leiame korrutise: $20{,}5 \cdot 0{,}32 = 6{,}56$. Otsitav korrutis on 6,6.

5.3. PROTSENDID

5.3.1. Protsent (tähis %) on sajandik vaadeldavast kogumist, tervikust, arvust jne. Nii on 1% 300 rublast 3 rubla, 17% 400 õpilasest 68 õpilast ning 25% arvust 300 arv 75.

5.3.2. Protsentarvutuse kolm põhiülesannet. Igas protsentülesandes on tegemist 3 suurusega: A — tervik (terve), a — osa ja m — **osamäär** (osa suurus protsentides) ehk **protsent**. Kui kaks neist on antud, siis saab leida kolmanda. Siit 3 põhiülesannet.

1. Osamäära m leidmine terviku A ja osa a järgi ehk kahe arvu suhte väljendamine %-des.
2. Osa a määramine protsendi m ja terviku A järgi.
3. Terviku A määramine, kui on teada protsent m ja vastav osa a.

Neid ülesandeid lahendatakse järgmiste üldiste eeskirjade järgi.

1. Jagame 100 tervikuga A (saades ühe ühiku suuruse %-des) ja korrutame siis osaga a (saades a ühiku suuruse %-des).

Näide. Leiame, mitu protsenti on 17 arvust 25:

$$\frac{17}{25} \cdot 100\% = 68\%.$$

2. Jagame terviku A 100-ga (saades 1%-le vastava osa suuruse) ning korrutame tulemuse protsendiga m (saades m %-le vastava osa suuruse).

Näide. Leiame 32% kogusaagist 524 t.:

$$\frac{524 \cdot 32}{100} = 167{,}68 \text{ t.} \approx 168 \text{ t.}$$

3. Jagame osa a protsendiga m (saades 1%-le vastava osa suuruse) ning korrutame tulemuse 100-ga (saades 100%-le vastava suuruse, terviku).

Näide. Toote hinda alandati 5% ehk 8 rbl. võrra. Leiame, kui palju maksis toode enne hinnaalandust:

$$\frac{8\cdot 100}{5}=160 \text{ rbl.}$$

Protsentülesannete lahendamisel on vaja selgeks teha, mida mõista terviku (100%) all, millest protsent (osamäär) on arvutatud. Sageli annab selleks võimaluse ülesande formuleering, milles vastav sõna esineb seestütlevas käändes (10% arvust, 25% hinnast jne.). Mõnikord aga pole vastavat suurust üldse nimetatud. Näiteks kui räägitakse tehase toodangu suurenemisest 9% võrra, siis tervikuna mõistetakse tehase toodangut eelmisel perioodil.

Näide. Teises kvartalis suurenes tehase toodang 14% võrra, kolmandas aga vähenes 8% võrra. Leiame, milline oli tehase toodang kolmandas kvartalis, võrreldes esimese kvartaliga.

II kvartali toodang oli 114%; toodangu langus III kvartalis oli 8% 114-st ehk $\frac{114\cdot 8}{100}=9{,}12\% \approx 9\%$; III kvartali toodang moodustas seega I kvartaliga võrreldes $114-9{,}12=104{,}88\% \approx 105\%$.

5.4. VÕRRE JA TEMA OMADUSED

5.4.1. Võrre. Jagatist $a:b$ ehk $\frac{a}{b}$ nimetatakse arvude a ja b **suhteks.** Arve a ja b nimetatakse selle **suhte liikmeteks.**

Kahe suhte vahelist võrdust nimetatakse **võrdeks.** Võrde võime kirjutada kujul

$$a:b=c:d \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Arve a, b, c ja d nimetatakse **võrde liikmeteks.** Seejuures b ja c on võrde **siseliikmed** ning a ja d võrde **välisliikmed.**

5.4.2. Võrde omadusi

Võrde põhiomadus: võrdus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ on õige parajasti siis, kui $ad=bc$.

Näide. $\frac{6}{3}=\frac{2}{1} \Leftrightarrow 6\cdot 1=3\cdot 2$.

Põhiomadusest saab leida võrde neljanda liikme, kui 3 liiget on teada.

Näide. Leida x, kui $\frac{9}{x}=\frac{10}{4}$.

Võrde omaduse põhjal $10x=9\cdot 4$, millest $x=3{,}6$.

Teisi võrde omadusi.

1. Igas võrdes $a:b=c:d$ võib vahetada
   1) siseliikmed: $a:c=b:d$;
   2) välisliikmed: $d:b=c:a$;
   3) nii sise- kui välisliikmed: $d:c=b:a$;
   4) sise- ja välisliikmed omavahel: $b:a=d:c$.
2. Võrdest $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ järelduvad järgmised võrded:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

3. Võrretest

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

järelduvad võrded

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

ja

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_na_n}{m_1b_1+m_2b_2+\ldots+m_nb_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

kus arvud $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ei ole korraga nullid.

5.4.3. Võrdeline jaotamine. Võrdelise jaotamisena mõistetakse mingi suuruse jagamist osadeks, mis on võrdelised etteantud arvudega. Lahendatakse võrde 3. omaduse järgi.

Näide 1. Jaotada 180 kaheks liidetavaks, mis suhtuvad nagu 5 : 7.

Lahendused. 1. Olgu liidetavad a ja b, s. t. $a+b=180$. Tingimuse kohaselt saame võrde

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{7} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{5}=\frac{b}{7},$$

millest võrde 3. omaduse põhjal $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}=\frac{a+b}{5+7}$.

Et $a+b=180$, siis $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}=\frac{180}{12}=15$, millest $a=75$ ja $b=105$.

2. Sama ülesande võime lahendada ka teisiti. Kui tähistada üks liidetav tähega x, siis teine on $180-x$ ning ülesande tingimuse kohaselt saame võrde

$$\frac{x}{180-x}=\frac{5}{7},$$

millest $7x=900-5x$ ehk $x=75$ ja $180-x=105$.

Näide 2. Hoonete ehitamisel kasutatakse tsementlubimörti vahekorras 1 : 2 : 10, s. o. 1 mahuosa tsementi, 2 mahuosa lubjatainast ja 10 mahuosa liiva. Kui palju üht või teist materjali kulub 26 m³ mördi saamiseks?

Tähistame vastavad materjalide hulgad tähtedega x, y ja z. Seega

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{10}=\frac{x+y+z}{1+2+10}=\frac{26}{13}=2,$$

millest $x=2$, $y=4$ ja $z=20$. Tsementi kulub 2 m³, lubjatainast 4 m³ ja liiva 20 m³.

Võrdelise jaotamise ***eeskiri.***

Teatava suuruse A jaotamisel võrdeliselt antud arvudega liidame need arvud (saame osade üldarvu), seejärel jagame suuruse A osade üldarvuga (saame ühele osale vastava suuruse) ning lõpuks korrutame seda jagatist iga üksiku antud arvuga (saame igale arvule vastava osa antud suurusest).

Näide. Jagada arv 270 osadeks, mis suhtuvad nagu 1 : 3 : 4 : 10.

Osade koguarv: $1+3+4+10=18$.

Ühele osale vastav arv: $\frac{270}{18}=15$.

Üksikute osade suurused: $1\cdot15=15$, $3\cdot15=45$, $4\cdot15=60$, $10\cdot15=150$.

Kontroll: $15+45+60+150=270$.

5.5. ÜKS- JA HULKLIIKMED

5.5.1. Algebraline avaldis. Avaldist, milles on näidatud arvude ja täheliste sümbolitega tehtavad tehted ning nende järjekord, nimetatakse **matemaatiliseks** ehk **analüütiliseks avaldiseks.**

Näiteid. 1) $2a+\sqrt{b}$; 2) $\log(5x^2+\sin x)$;
3) $(\sqrt{4\tan x-3}-2^x):(y^3+2z)$.

Matemaatilist avaldist, milles teheteks on vaid liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine, nimetatakse **algebraliseks avaldiseks.**

Näiteid. 1) $4ax^2-5bx+6$; 2) $\sqrt[3]{2a^2-3y}$; 3) $\frac{7x^2-2}{4x+5}$.

Niisugust algebralist avaldist, kus ei esine juurimist, nimetatakse **ratsionaalseks avaldiseks,** vastasel juhul **irratsionaalseks.**

5.5.2. Üksliikmed. Arvulise teguri ja ühe või mitme tähelise sümboli naturaalarvulise astendajaga astme korrutist nimetatakse üksliikmeks.

Näiteid. 1) $11ab^2c^5$; 2) $-\frac{3}{4}d$; 3) $17{,}2xy^2$.

Üksliikmena vaadeldakse ka igat arvu ja üksikut tähelist sümbolit. Üksliikmes esinevat arvulist tegurit nimetatakse **üksliikme kordajaks.** Kui see võrdub ühega, siis jäetakse ta märkimata. Üksliikme kordajaks võib olla ka täheline sümbol. Sel juhul kannab kordaja parameetri

nime. Üksliikme kordaja märki (+ või —) nimetatakse **üksliikme märgiks.**

5.5.3. Tehted üksliikmetega. Kaht üksliiget nimetatakse sarnasteks, kui nad üksteisest üldse ei erine või erinevad ainult kordajate poolest. Näiteks $2ab^2$; $-1{,}5ab^2$ ja ab^2 on sarnased.

Üksliikmete liitmisel tuleb liidetavad üksliikmed kirjutada üksteise järele koos märkidega (+ või —), mis neil on.

Näide. Üksliikmete $2{,}3a^2$, $-bc^3$ ja $\frac{1}{2}ab^2$ summa on $2{,}3a^2 - bc^3 + \frac{1}{2}ab^2$.

Üksliikmete lahutamisel üksliikmest tuleb lahutatavad üksliikmed kirjutada vähendatava järele vastandmärkidega.

Näide. Üksliikmete $-3{,}7x$, $5x^2$ ja $-x^3$ lahutamisel üksliikmest 6 saame avaldise

$$6 + 3{,}7x - 5x^2 + x^3.$$

Üksliikmete liitmisel ja lahutamisel saadud avaldisi nimetatakse üksliikmete **algebralisteks summadeks.** Üksliikmete algebralises summas võib muuta liidetavate järjekorda. Kui üksliikmete algebralises summas esineb sarnaseid liikmeid, siis need koondatakse, s. t. asendatakse kõik sarnased liikmed üheainsa liikmega, mille kordaja võrdub asendatavate liikmete kordajate summaga.

Näide. $4x^2 - 6xy + 2x^2 + 7xy = 6x^2 + xy$.

Üksliikmete korrutamisel kordajad korrutatakse ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad liidetakse.

Näide. $(-5x^2y^3z) \cdot (3x^3yz^2) = -15x^5y^4z^3$.

Üksliikmete jagamisel kordajad jagatakse ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad lahutatakse.

Näide. 1) $(6a^4b^3c^2) : (3a^2b^2c^2) = \frac{6}{3}a^{4-2}b^{3-2}c^{2-2} = 2a^2bc^0 = 2a^2b$;
2) $(72x^2y^2) : (8x^3y) = 9x^{-1}y$.

Teises näites ei ole üksliikmete jagatis enam üksliige, sest tähelise sümboli x astendaja pole naturaalarv. Viimast jagatist võime kirjutada kujul $\frac{9y}{x}$; seda nimetatakse algebraliseks murruks.

Märkus. Sageli on kasulik vaadelda üksliikmetena ka niisuguseid avaldisi, kus tähelise sümboli asemel on mingi matemaatiline sümbol, näiteks $2a\sqrt{b}$, $4 \log a$, $5 \sin^2 x$ jne. Selline üksliikme üldisem mõistmine annab eeskirjad tehete sooritamiseks mitmesuguste matemaatiliste avaldistega, näiteks $7\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$, $6 \cos x \sin^2 x : 3 \sin^2 x = 2 \cos x$.

5.5.4. Üksliikmete suurim ühistegur ja vähim ühiskordne üldistavad vastavaid naturaalarvude puhul vaadeldud mõisteid (art. 3.3.6., 3.3.7.). Neid leitakse analoogiliselt.

Näide. Üksliikmete $12ax^2y^3$, $8abxy^2$ ja $20a^2b^2xy$ $S(12ax^2y^3; 8ab\,xy^2; 20a^2b^2xy) = 4axy$; $V(12ax^2y^3; 8abxy^2; 20a^2b^2xy) = 120a^2b^2x^2y^3$.

5.5.5. Hulkliikmed ja tehted nendega. Hulkliikmena mõistetakse üksliikmete algebralist summat. Selles summas esinevaid üksliikmeid nimetatakse hulkliikme liikmeteks.

Hulkliikmete liitmisel tuleb liidetavate hulkliikmete kõik liikmed kirjutada üksteise järele koos nende märkidega ja sarnased liikmed koondada.

Näide. $(5x^2 - 4x + 3) + (x^2 + 3x - 5) = 5x^2 - 4x + 3 + x^2 + 3x - 5 = 6x^2 - x - 2$.

Hulkliikmete lahutamisel tuleb vähendatava järele kirjutada vähendaja hulkliikme kõik liikmed vastandmärkidega ning sarnased liikmed koondada.

Näide. $(3a^3 - 7a + 4) - (2a^3 - 3a^2 + a) =$
$= 3a^3 - 7a + 4 - 2a^3 + 3a^2 - a = a^3 + 3a^2 - 8a + 4$.

Hulkliikme korrutamisel üksliikmega tuleb hulkliikme iga liige korrutada selle üksliikmega.

Näide. $(x^2y - xy^2 + xy) \cdot xy = x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2$.

Kahe hulkliikme korrutamisel tuleb üks hulkliige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ning sarnased liikmed koondada.

Näide. $(3x^2-4x+1)\cdot(2x^2+5)=6x^4-8x^3+2x^2+15x^2-20x+5=$
$=6x^4-8x^3+17x^2-20x+5.$

5.5.6. Algebralised murrud. Kahe algebralise avaldise jagatist nimetatakse algebraliseks murruks.

Näiteid. $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{2x}{x^2+4}$, $\frac{abc}{xy}$, $\frac{a^2-2bc}{a}$.

Tehteid algebraliste murdudega sooritatakse nagu harilike murdudega.

Näiteid. 1) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

2) $-\frac{b^2}{a^2-1}\cdot\frac{a-1}{5b^3}=-\frac{b^2(a-1)}{(a^2-1)5b^3}=-\frac{1}{5b(a+1)}$.

5.5.7. Polünoomid. Polünoomina mõistetakse hulkliiget, mille liikmeteks on muutuja naturaalarvulise astendajaga astmed koos kordajatega.

Näiteid. 1) $2x^3-4x^2+x-5$; 2) y^5+2y^3-3; 3) ax^2+bx+c.

Viimases näites on polünoom muutuja x suhtes, kordajatega a, b ja c.

Iga hulkliige ei ole polünoom. Näiteks
$2x^2y-ay+x^2y^3$, $ab^2x^2-7cx^2+4xy-3y^2$ on hulkliikmed, kuid ei ole polünoomid.

Polünoomi astmeks nimetatakse muutuja suurimat astendajat. Esimeses näites on **kolmanda astme polünoom** (ehk **kuuppolünoom**), teises näites **viienda astme polünoom,** viimases näites **teise astme** ehk **ruutpolünoom**. Suurima astmega liiget nimetatakse **polünoomi pealiikmeks.** Kui pealiikme kordaja on üks, siis nimetatakse polünoomi **taandatud polünoomiks** (teine näide).

Polünoomi liiget, milles muutujat ei esine (muutuja astendaja on 0), nimetatakse **polünoomi vabaliikmeks.**

Polünoome tähistatakse sümboliga $P(x)$, $Q(x)$ jne. Kui tahetakse rõhutada ka polünoomi astet, märgitakse see indeksina ($P_n(x)$ — n-astme polünoom).

Muutuja väärtust, mille korral polünoomi väärtus on 0, nimetatakse **polünoomi nullkohaks.** On teada, et n-astme polünoomil võib olla ülimalt n nullkohta. Polünoomi $P(x)$ nullkohad on võrrandi $P(x)=0$ lahendeiks.

Täisarvuliste kordajatega taandatud polünoomil on ratsionaalarvude hulgas **Q** vaid täisarvulisi nullkohti, mis on vabaliikme tegureiks (art. 6.5.2.).

Tehteid (liitmine, lahutamine, korrutamine) polünoomidega tehakse nagu hulkliikmetega.

Polünoomide jagamiseks korrastatakse need enne, s.t. paigutatakse polünoomi liikmed astmete kahanevasse järjekorda. Seejärel jagatakse analoogiliselt täisarvude jagamisega.

Näide 1.

$$\begin{array}{l|l}
6x^4+x^3-3x^2+11x-15 & 2x^2-x+3 \\
\underline{6x^4-3x^2+9x^2} & \underline{3x^2+2x-5} \\
4x^3-12x^2+11x & \\
\underline{4x^3-2x^2+6x} & \\
-10x^2+5x-15 & \\
\underline{-10x^2+5x-15} &
\end{array}$$

Jagatis on polünoom $3x^2+2x-5$.

Näide 2. Jagame polünoomi $3x^5-x^3+x^2-2$ polünoomiga x^3-2x^2+1.

$$\begin{array}{l|l}
3x^5+0x^4-x^3+x^2+0x-2 & x^3-2x^2+1 \\
\underline{3x^5+6x^4+3x^2} & \underline{3x^2+6x+11} \\
6x^4-x^3-2x^2 & \\
\underline{6x^4-12x^3+6x} & \\
11x^3-2x^2-6x-2 & \\
\underline{11x^3-22x^2+11} & \\
20x^2-6x-13 &
\end{array}$$

Selgus, et polünoom $3x^5-x^3+x^2-2$ ei jagu polünoomiga x^3-2x^2+1. Jääb jääk $20x^2-6x-13$. Seega võime (analoogiliselt naturaalarvude jäägiga jagamisega) kirjutada võrduse

$$\frac{3x^5-x^3+x^2-2}{x^3-2x^2+1}=3x^2+6x+11+\frac{20x^2-6x-13}{x^3-2x^2+1}.$$

Olukorda polünoomi jagamisel lineaarse kaksliikmega $x-a$ iseloomustab Bezout' ***teoreem.***

Polünoomi jagamisel avaldisega $x-a$ tekkiv jääk on võrdne polünoomi väärtusega kohal $x=a$.

Järeldus.

Polünoom jagub kaksliikmega $x-a$ parajasti siis, kui a on polünoomi nullkoht.

Näiteid. 1. Polünoom $P(x)=x^4-2x^3-3x^2+10x-8$ jagub kaksliikmega $x-2$, sest $P(2)=0$. Tõepoolest,

$$x^4-2x^3-3x^2+10x-8=(x^3-3x+4)(x-2).$$

2. x^n-a^n jagub vahega $x-a$ iga naturaalarvu n korral.
3. x^n-a^n jagub summaga $x+a$ iga paarisarvulise n korral.
4. x^n+a^n jagub summaga $x+a$ iga paarituarvulise n korral.

5.5.8. Abivalemid. Tehetes hulkliikmetega kasutatakse järgmisi valemeid, mida tuntakse arvutamise abivalemitena.

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
5. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
6. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
8. $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\ldots+$
$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\ldots k}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n.$
9. $(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\ldots+$
$+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\ldots k}a^{n-k}b^k+\ldots+$
$+(-1)^nb^n.$

10. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.
11. $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-b^{n-1})$, kui n on paarisarv.
12. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+b^{n-1})$, kui n on paaritu arv.
13. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+$
$+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n$.

Näide. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Märkus. Valemites 8 ja 9 saab vastavaid kordajaid (binoomkordajaid) kergesti leida nn. Pascali kolmnurgast (art. 8.1.5.).

5.5.9. Hulkliikme tegureiks lahutamine on hulkliikme esitamine üksliikmete ja lihtsamate hulkliikmete korrutisena. Seejuures kasutatakse

1) hulkliikme liikmete ühiste tegurite sulgude ette toomist (näited 1, 2, 3),
2) hulkliikme liikmete rühmitamist (näited 2, 3),
3) abivalemeid (näited 1, 3, 4).

Näide 1. $a^2bx^2+2a^2bx+a^2b=a^2b(x^2+2x+1)=a^2b(x+1)^2$.
Näide 2. $ab-2ac+b^2-2bc=(ab-2ac)+(b^2-2bc)=$
$=a(b-2c)+b(b-2c)=(b-2c)(a+b)$.
Näide 3. $a^3+5a^2+3a-9=(a^3-1)+(5a^2-5)+(3a-3)=$
$=(a-1)(a^2+a+1)+5(a+1)(a-1)+3(a-1)=$
$=(a-1)(a^2+a+1+5a+5+3)=(a-1)(a^2+6a+9)=$
$=(a-1)(a+3)^2$.
Näide 4. $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

5.5.10. Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks. Kui võrrand $ax^2+bx+c=0$ on lahenduv (lahendid x_1 ja x_2), siis vastav ruutkolmliige ax^2+bx+c lahutub lineaartegurite korrutiseks:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Näide. Et ruutvõrrandi $3x^2+8x-3=0$ lahendid on $\frac{1}{3}$ ja -3, siis $3x^2+8x-3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)=(3x-1)(x+3)$.

5.6. ASTMED JA JUURED

5.6.1. Astme mõiste

Def. Ühest suurema naturaalarvu n korral nimetatakse **astmeks** a^n korrutist, milles on n võrdset tegurit a, s. t.

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ tegurit}}.$$

Näiteid. $3^2=3\cdot3=9$; $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$; $5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$;

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}.$$

Astme a^n leidmist nimetatakse **astendamiseks,** arvu a **astendatavaks** (ehk **astme aluseks**) ning arvu n **astendajaks** (ehk **astmenäitajaks**).

Ülalesitatud astme definitsiooni laiendatakse nii, et astendajaks võib olla suvaline reaalarv. Esmalt defineeritakse astmed a^1 ja a^0 järgmiste võrdustega:

$$a^1=a,$$

$$a^0=1,\quad\text{kui}\quad a\neq0.$$

Negatiivse astendajaga aste defineeritakse võrdusega

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\quad\text{kui}\quad a\neq0.$$

Ratsionaalarvulise astendajaga aste defineeritakse võrdusega

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Irratsionaalse astendajaga aste a^s defineeritakse seosega

$$a^s=\lim_{n\to\infty}a^{r_n},$$

kus (r_n) on suvaline ratsionaalarvude jada, mille piirväärtuseks on irratsionaalarv s (näiteks, (r_n) on arvu s puuduga lähismurdude jada).

Näiteid. $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$; $(-4)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-4)^2}=\sqrt[3]{16}$;

$2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{2^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Märkus. Kui astendaja on irratsionaalarv või paarisarvulise nimetajaga taandatud murd, siis reaalarvude hulgas **R** on mõte vaid positiivse astendatavaga astmetel. Nii ei ole mõtet astmetel $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ja $(-2)^{\frac{3}{4}}$.

Astme omadusi.

1. Kui $a>0$, siis $a^r>0$ igasuguse reaalarvulise astendaja r puhul.
2. $(-a)^{2n}=a^{2n}$ ja $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.
3. $0^r=0$ iga $r\neq0$ puhul.
4. $1^r=1$.

5.6.2. Tehted astmetega

sooritatakse järgmisi eeskirju kasutades.

1. Võrdsete alustega astmete korrutamisel tuleb astendajad liita:

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}.$$

Näiteid. $2^3\cdot2^2=2^5=32$; $3x^4\cdot5x^3=15x^7$; $b^4\cdot b^{-3}=b$.

2. Võrdsete astendajatega astmete korrutamisel astendatavad korrutatakse:

$$a^r\cdot b^r=(ab)^r.$$

Näiteid. $2^2\cdot3^2=6^2=36$; $3^\pi\cdot4^\pi=12^\pi$; $x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}=(xy)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{xy}$.

3. Võrdsete alustega astmete jagamisel astendajad lahutatakse:

$$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}.$$

Näiteid. $24x^6 : 6x^3 = \frac{24}{6} x^{6-3} = 4x^3$; $\frac{(a-b)^3}{a-b} = (a-b)^2$;

$(-4)^{-2} : (-4)^{-3} = 4$.

4. Võrdsete astendajatega astmete jagamisel astendatavad jagatakse:

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r.$$

Näiteid. $48^3 : 16^3 = \left(\frac{48}{16}\right)^3 = 3^3 = 27$; $(0{,}6)^3 = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{6^3}{10^3} =$

$= \frac{216}{1000} = 0{,}216$.

5. Astme astendamisel astendajad korrutatakse:

$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

Näiteid. $(x^2)^5 = x^{10}$; $(5^4)^{\frac{1}{2}} = 5^2 = 25$; $(9^2)^{-\frac{1}{4}} = 9^{-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$.

5.6.3. Juure mõiste. Olgu astendaja n ühest suurem fikseeritud naturaalarv. Astendamise pöördtehet nimetatakse sel juhul j u u r i m i s e k s. Antud astendaja n korral tähendab see vastavalt arvule a sellise arvu b leidmist, et $b^n = a$.

Juurimistehte tulemust märgitakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$, mida nimetatakse ***n*-nda astme** (ehk ka ***n*-ndaks) juureks** arvust a. Arvu n nimetatakse seejuures **juurijaks** ja arvu a **juuritavaks.** Kui juurijaks on 2, siis jäetakse juurija kirjutamata ning kasutatakse sümbolit $\sqrt{a}$, mida nimetatakse **ruutjuureks** arvust a. Kui juurijaks on 3, siis nimetatakse juurt **kuupjuureks.**

Kui paarituarvulise juurija korral on juurimistehte resultaat üheselt määratud iga reaalarvu a puhul, siis paarisarvulise juurija korral see nii ei ole. Juure sümboli $\sqrt[n]{a}$

ühese tähenduse tagamiseks kasutatakse $a \in \mathbf{R}$ puhul järgmist k o k k u l e p e t:

kui juurija n on paarisarv, siis $a > 0$ korral juur $\sqrt[n]{a}$ tähistab niisugust positiivset arvu, mille n-es aste on a.

Vastavalt sellele kokkuleppele $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ ning $\sqrt{4} \neq -2$.

Reaalarvude hulgas **R** kehtivad järgmised o m a d u s e d.

1. Igal positiivsel arvul a on parajasti üks positiivne n-es juur.
2. Negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.
3. Igal negatiivsel arvul on parajasti üks paaritu juurijaga juur, mis on samuti negatiivne.
4. Iga n puhul $\sqrt[n]{0} = 0$ ja $\sqrt[n]{1} = 1$.
5. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.
6. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$.
7. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
8. $(-\sqrt[2n]{a})^{2n} = a$.

5.6.4. Tehted juurtega võib sooritada astme omadustest (art. 5.6.2.) lähtudes, arvestades seost

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Tehetes juurtega kasutatakse järgmisi e e s k i r j u.

1. Võrdsete juurijatega juurte korrutamisel korrutatakse juuritavad:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Näiteid. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{60}$.

2. Võrdsete juurijatega juurte jagamisel jagatakse juuritavad:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näiteid. $\sqrt{10}:\sqrt{5}=\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{ab^2}:\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{b}$.

3. Juure astendamisel astendatakse juuritav:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Näiteid. $(\sqrt{a})^3=\sqrt{a^3}$; $(\sqrt[4]{9})^2=\sqrt[4]{81}=3$.

4. Juure juurimisel korrutatakse juurijad:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Näiteid. $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$; $\sqrt[3]{\sqrt{-18}}=\sqrt[9]{-18}$.

5. **Juure taandamise** valem:

$$\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Astme juurimisel võib astendajat ja juurijat jagada ühe ja sama arvuga.

Näiteid. $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

6. **Juure laiendamise** valem:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Astme juurimisel võib astendajat ja juurijat korrutada ühe ja sama arvuga.

Näiteid. $\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}$; $\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[9]{x^{12}}$.

Juurte laiendamist ja taandamist kasutatakse erineva juurijaga juurte korrutamisel ja jagamisel.

Näiteid. 1) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{x^5}$;

2) $\dfrac{\sqrt{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^9}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^{13}}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{2^{12}}=2^2=4.$

5.7. LOGARITMID

5.7.1. Logaritm ja tema omadused

Def. Arvu x **logaritmiks** alusel a ($a>0$, $a\neq1$) nimetatakse arvu c, mille korral $a^c=x$.

Logaritmi leidmist nimetatakse **logaritmimiseks.** Arvu x (logaritmitava) logaritmi alusel a märgitakse sümboliga $\log_a x$. Logaritmi aluseks võib olla suvaline positiivne arv $a\neq1$. Kui alus $a=10$, siis nimetatakse vastavat logaritmi **kümnendlogaritmiks** ja tähistatakse sümboliga $\log x$ (venekeelses kirjanduses $\lg x$). Kui aluseks on arv $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71828\ldots$, siis nimetatakse vastavat logaritmi **naturaal-** ehk **loomulikuks logaritmiks** ja tähistatakse sümboliga $\ln x$.

Omadused.

1. $a^{\log_a x}=x$.
2. Logaritmid eksisteerivad vaid positiivsetel arvudel.
3. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$.
4. $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.
5. $\log_a x^n=n\log_a x$.
6. $\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x$.
7. $\log_a 1=0$.
8. $\log_a a=1$.
9. $\log_b x=\frac{1}{\log_a b}\log_a x$.
10. $\log_b a\cdot\log_a b=1$.

Omaduse 9 põhjal on võimalik üle minna ühtedelt logaritmidelt teistele. Ülemineku naturaallogaritmidelt küm-

nendlogaritmidele tuleb esimesed korrutada teguriga $M = \log e \approx 0{,}4343$. Suurust M nimetatakse **kümnendlogaritmide mooduliks.**

5.7.2. **Kümnendlogaritmid.** Me kasutame peamiselt kümnendsüsteemi arve, seega on neile vastavalt otstarbekas kasutada ka kümnendlogaritme. Viimaste jaoks on koostatud tabelid. Samuti võib neid leida arvutuslükatiga.

Arvu 10^n, kus n on kas positiivne või negatiivne täisarv, nimetatakse **järguühikuks.** Vastavalt kümnendlogaritmi definitsioonile on järguühiku kümnendlogaritm võrdne arvuga n. Ehk teisiti: *järguühiku kümnendlogaritm võrdub tema üleskirjutuses numbri* 1 *järel olevate nullide arvuga või numbri* 1 *ees olevate nullide arvu vastandarvuga.*

Näiteid. $\log 100 = 2$; $\log 0{,}1 = -1$; $\log 0{,}0001 = -4$.

Arvude kümnendlogaritmid esitatakse kümnendmurdudena, kusjuures selle kümnendmurru täisosa nimetatakse **karakteristikuks** ja murdosa **mantissiks.**

Kui arvu kümnendlogaritm on negatiivne, siis antakse talle kuju, milles karakteristik on negatiivne ja mantiss positiivne. Selleks lahutatakse täisosast 1 ning murdosale liidetakse 1.

Näide. $\log 0{,}07 = -1{,}1549 = -1 + (-0{,}1549) = -1 - 1 + (-0{,}1549 + 1) = -2 + 0{,}8451 = \overline{2}{,}8451$.

Sellisel viisil saadud negatiivse täisosa ja positiivse murdosaga arve nimetatakse poolnegatiivseteks. Arvu $\overline{2}{,}8451$ loetakse «kaks miinusega koma 8451».

Kümnendlogaritmide tabeli koostamisel kasutatakse järgmist kümnendlogaritmide omadust.

Arvu korrutamisel järguühikuga 10^n tuleb liita arvu kümnendlogaritmi karakteristikule n, mantiss aga jätta muutmata.

Selle reegli kohaselt on arvudel, mis erinevad üksteisest vaid koma asukoha poolest, üks ja sama logaritmi mantiss. Tabelis esitataksegi ainult mantiss.

Kümnendlogaritmi karakteristik määratakse järgmise *reegli* alusel:

arvust 1 suurema arvu logaritmi karakteristik on ühe võrra väiksem selle arvu täisosa numbrite arvust; arvust 1 väiksema arvu logaritmi karakteristik on negatiivne täisarv, mille absoluutväärtus võrdub selle arvu tüvenumbrite ees olevate nullide arvuga (kaasa arvatud ka täisosa tähistav null).

Näiteid. $\log 130{,}1 = 2, \ldots$; $\log 7{,}52 = 0, \ldots$;
$\log 0{,}44 = \overline{1}, \ldots$; $\log 0{,}00105 = \overline{3}, \ldots$.

5.7.3. **Logaritmimine ja potentseerimine.** Logaritmimist kasutatakse arvutuste hõlbustamiseks, sest üleminekul logaritmidele asendub keerukam tehe lihtsamaga (korrutamine liitmisega, juurimine jagamisega jne.). Logaritmi järgi arvu leidmist nimetatakse **potentseerimiseks.**

Näide. Arvutada

$$A = \frac{708 \cdot 0{,}054 \cdot \sqrt[4]{15{,}86}}{14{,}07 \cdot 3{,}112^3}.$$

Kõigepealt leiame arvu A logaritmi:

$$\log A = \log 708 + \log 0{,}054 + \frac{1}{4}\log 15{,}86 - \log 14{,}07 - 3\log 3{,}112.$$

Tehes vastavad tehted logaritmidega, saame $\log A$ ning seejärel potentseerides arvu A. Nende arvutuste sooritamisel on otstarbekas kasutada järgmist skeemi.

$\log 708$		2,8500
$\log 0{,}054$		$\overline{2}$,7324
$\frac{1}{4}\log 15{,}86$	$\frac{1}{4}\cdot 1{,}2003$	0,3001
		1,8825
$\log 14{,}07$		1,1483
$3\log 3{,}112$	$3 \cdot 0{,}4930$	1,4790
		2,6273
$\log A$		$\overline{1}$,2552

$A = 0{,}1800$

5.8. KESKMISED

5.8.1. Aritmeetiline keskmine. Arvude a_1, a_2, ..., a_n aritmeetiliseks keskmiseks nimetatakse arvu

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Näide. Arvude 17, 24, 19 ja 21 aritmeetiline keskmine on

$$\frac{17+24+19+21}{4}=\frac{81}{4}=20{,}25.$$

Näide. Sordi «Tellissaare õun» saagikuse määramisel mõõdeti 10 puu kogusaak. Saadi järgmised kogusaagid kilogrammides: 186, 194, 203, 164, 170, 212, 201, 194, 189 ja 207.

Nende arvude aritmeetiline keskmine

$$\bar{a}=\frac{186+194+203+164+170+212+201+194+189+207}{10}=192.$$

Suurust 192 kg loetakse vastava sordi keskmiseks viljakuseks.

Samamoodi leitakse näiteks korvpallimeeskonna keskmine pikkus, põrsaste keskmine sünnikaal jne.

Aritmeetilise keskmise leidmiseks kasutatakse järgmist, arvutamist. lihtsustavat võtet. Hinnatakse vaadeldavate arvude puhul mingi «keskmine arv» ning leitakse antud arvude erinevused sellest «keskmisest». Nende erinevuste aritmeetilise keskmise liitmine valitud «keskmisele» annabki tõelise aritmeetilise keskmise.

Näide. Leiame eelmises näites saadud keskmise õunasaagi nii, et võtame esialgseks «keskmiseks» 195. Üksikute puude saakide erinevused sellest «keskmisest» on —9, —1, 8, —31, —25, 17, 6, —1, —6 ja 12. Nende erinevuste aritmeetilise keskmisena saame:

$$\frac{-9-1+8-31-25+17+6-1-6+12}{10}=\frac{-30}{10}=-3.$$

Näites toodud arvude aritmeetiline keskmine on $195-3=192$.

5.8.2. Geomeetriline keskmine. Positiivsete arvude a_1, a_2, ..., a_n **geomeetriliseks keskmiseks** nimetatakse suurust $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Positiivsete arvude geomeetriline keskmine ei ole suurem samade arvude aritmeetilisest keskmisest.

Näide. Arvude 4 ja 6 aritmeetiline keskmine on $\frac{4+6}{2}=5$ ning geomeetriline keskmine $\sqrt{4\cdot6}=\sqrt{24}\approx4{,}9$.

Kahe arvu geomeetrilist keskmist nimetatakse ka nende arvude **keskmiseks võrdeliseks.**

5.9. ARITMEETILINE JA GEOMEETRILINE JADA

5.9.1. Aritmeetiline jada. Jada, milles iga liikme ja temale eelneva liikme vahe on konstantne, nimetatakse aritmeetiliseks.

Näide. Jadad 1, 3, 5, ...; 10, 7, 4, ... ja 2, —2, —6, ... on aritmeetilised jadad. Seda ei ole jada 0, 4, 9, ...

Aritmeetilise jada a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... korral nimetatakse suurust $d=a_2-a_1=a_n-a_{n-1}$, $\forall\, n\in\mathbf{Z}^+$, **jada vaheks.**

Üldliikme valem:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

Aritmeetilise jada liikmed on lineaarfunktsiooni

$$y=dx+(a_1-d)$$

väärtused naturaalarvulise argumendi x korral.

Aritmeetilist jada nimetatakse kasvavaks, kui $d>0$, ja kahanevaks, kui $d<0$.

Aritmeetilise jada n liikme summa valemid:

$$s_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \quad \text{ehk} \quad s_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n.$$

Näide. Leida kõigi 5-ga jaguvate kahekohaliste arvude summa.

Need arvud moodustavad aritmeetilise jada. Seejuures 1-ga algavaid arve on 2, 2-ga algavaid 2 jne. kuni 9-ga algavaid 2, kokku

18 arvu. Niisiis: $n=18$, $a_1=10$, $a_n=95$ ja

$$s=\frac{10+95}{2}\cdot 18=945.$$

5.9.2. Geomeetriline jada. Jada, milles iga liikme ja temale eelneva liikmè jagatis on konstantne, nimetatakse geomeetriliseks.

Näide. Jadad 1, 2, 4, ...; 8, 2, $\frac{1}{2}$, ... ja 2, —6, 18, ... on geomeetrilised, jada 4, 3, $\frac{1}{2}$, ... aga mitte.

Geomeetrilise jada a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... korral nimetatakse arvu

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}, \qquad \forall n\in \mathbf{Z}^+,$$

jada teguriks.

Üldliikme valem:

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

Kui tegur $q>0$, siis geomeetrilise jada kõik liikmed on *ühe ja sama märgiga*, kui aga $q<0$, siis *vahelduvate märkidega.*

Summa valemid:

$$s_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad \text{ehk} \quad s_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}, \quad q\neq 1.$$

5.9.3. Lõpmatult kahanev geomeetriline jada. Geomeetrilist jada nimetatakse lõpmatult kahanevaks, kui tema tegur q rahuldab tingimust:

$$-1<q<1. \quad \text{ehk} \quad |q|<1.$$

Näide. Jadad 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... ja 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ... on lõpmatult kahanevad geomeetrilised jadad vastavalt teguritega $q=\frac{1}{2}$ ja $q=-\frac{1}{3}$.

Lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada üldliikme piirväärtus on 0.

Lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada summa

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$

Summat, mille liidetavad moodustavad geomeetrilise jada, nimetatakse **geomeetriliseks reaks.** Kui $|q|<1$, siis nimetatakse geomeetrilist rida koonduvaks ja suurust

$$s=\frac{a_1}{1-q}$$

tema summaks.

5.10. DETERMINANDID

5.10.1. Teist järku determinant. Teist järku ehk **kaherealiseks determinandiks** nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Suurusi a_1, a_2, b_1 ja b_2 nimetatakse **determinandi elementideks.** Teist järku determinandis on **kaks rida** a_1, a_2 ja b_1, b_2 ning **kaks veergu** a_1, b_1 ja a_2, b_2. Elemendid a_1, b_2 moodustavad **peadiagonaali** ja elemendid a_2, b_1 **kõrvaldiagonaali.**

Teist järku determinant on võrdne peadiagonaali elementide korrutise ja kõrvaldiagonaali elementide korrutise vahega.

Näide.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-5\cdot 4=-26.$$

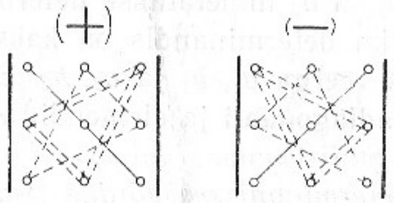
Teist järku determinandi abil on võimalik üles kirjutada kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi lahendeid (vt. art. 6.12.1.).

5.10.2. Kolmandat järku determinant. Kolmandat järku ehk **kolmerealiseks determinandiks** nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Elemendid a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 moodustavad **kolm rida** a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 ja c_1, c_2, c_3 ning **kolm veergu** a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 ja a_3, b_3, c_3. Elemendid a_1, b_2, c_3 moodustavad **peadiagonaali** ja elemendid a_3, b_2, c_1 **kõrvaldiagonaali.**

Kolmandat järku determinandi arvutamisel kasutatakse Sarruse **reeglit**:
kolmandat järku determinant on võrdne summaga, mille plussiga liidetavateks on peadiagonaali elementide korrutis ja peadiagonaaliga paralleelsete mittetäielike diagonaalide elementide korrutised oma vastaselementidega (peadiagonaali suhtes) ning miinusega liidetavateks on kõrvaldiagonaali elementide korrutis ja kõrvaldiagonaaliga paralleelsete mittetäielike diagonaalide elementide korrutised oma vastaselementidega (kõrvaldiagonaali suhtes). Sarruse reegel on skemaatiliselt esitatud joonisel 5.1.



Joon. 5.1

Näiteid. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-6\cdot8\cdot1=45+84+96-105-72-48=0;$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16;$ $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6.$

5.10.3. Determinantide omadusi

1. Determinant ei muutu, kui tema read ja veerud vastavalt ümber vahetada, s. t. esimene rida esimese veeruga jne.
2. Kui determinandis kaks rida (veergu) omavahel ümber paigutada, siis muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Determinandi mingi rea (veeru) kõigi elementide korrutamisel ühe ja sama teguriga korrutub kogu determinant selle teguriga.
4. Kui determinandis on kahe rea (veeru) elemendid omavahel võrdelised, siis võrdub determinant nulliga.
5. Determinant, milles ühel pool peadiagonaali asuvad vaid nullid, on võrdne peadiagonaali elementide korrutisega.
6. Determinant, milles ühel pool kõrvaldiagonaali asuvad vaid nullid, on võrdne kõrvaldiagonaali elementide korrutise vastandarvuga.

6. VÕRRANDID JA VÕRRANDISÜSTEEMID

6.1. VÕRRAND. VÕRRANDI LAHENDAMINE

6.1.1. Võrrandi mõiste

Def. 1. **Võrrandiks** nimetatakse muutujat sisaldavat võrdust, milles üks või mitu tähelist suurust loetakse tundmatuks (otsitavaks).

Seega võib üks ja sama võrdus kujutada endast võrrandit erinevate täheliste suuruste suhtes.

Näide. Võrdust $2a+4x=3-ax$ võib vaadelda võrrandina kas x või a või korraga mõlema suhtes.

Tundmatu (muutuja) väärtust, mille korral võrrand osutub samasuseks, nimetatakse võrrandi **lahendiks.** Võrrandil võib olla üks või mitu lahendit, kuid neid võib olla ka lõpmata palju või mitte ühtegi.

Näide. Võrrandil $x^2-5x+6=0$ on kaks lahendit: $x_1=2$, $x_2=3$; võrrandil $x^4+1=0$ puuduvad lahendid hulgas **R**.

Mõningatel juhtudel on otstarbekas defineerida võrrandit järgmiselt.

Def. 2. **Võrrandiks** nimetatakse funktsioone määravate avaldiste võrdust.

Näiteks võrrandit $f(x)=g(x)$ võib vaadelda kui funktsioone $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ määravate avaldiste võrdust. Funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ määramispiirkondade ühisosa nimetatakse võrrandi $f(x)=g(x)$ määramispiirkonnaks ehk *muutuja lubatavate väärtuste hulgaks*. Lahendada võrrand $f(x)=g(x)$ tähendab leida argumendi x väärtused, mille korral funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ väärtused on võrdsed.

6.1.2. Samaväärsed võrrandid. Samaväärseteks ehk ekvivalentseteks võrranditeks nimetatakse võrrandeid, mille kõik lahendid on ühised või millel lahendid puuduvad. Seega on võrrandid $f(x)=g(x)$ ja $F(x)=G(x)$ samaväärsed, kui esimese võrrandi iga lahend on ka teise võrrandi lahendiks ja teise võrrandi iga lahend on ühtlasi esimese võrrandi lahendiks või võrrandeil lahendid puuduvad.

Näiteid. 1. Võrrandid $4x-3=5(x-1)$ ja $x-2=0$ on samaväärsed, sest nende ainsaks lahendiks on $x=2$.
2. Võrrandid $x^3-x^2-6x=0$ ja $x^2-x-6=0$ ei ole samaväärsed, sest esimese võrrandi lahendid on $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=3$, teisel võrrandil aga $x_1=-2$ ja $x_2=3$.

Samaväärsete võrrandite vahele pannakse märk $\Leftrightarrow$.

Näide. $x^2=x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$.

Teisenduse d, mis annavad esialgse võrrandiga samaväärse võrrandi.

1. Kui võrrandi pooled vahetada, siis saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow g(x)=f(x).$$

Näide. $16=5x \Leftrightarrow 5x=16$.

2. Kui võrrandi mõlemale poolele liita või mõlemast poolest lahutada üks ja sama arv või muutujat sisaldav avaldis, mis omab mõtet võrrandi kogu määramispiirkonnas, siis saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\pm c=g(x)\pm c;$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\pm h(x)=g(x)\pm h(x).$$

Näiteid. 1) $3x-8=4 \Leftrightarrow 3x-8+8=4+8 \Leftrightarrow 3x=12$;
2) $4x-1=-2x^2 \Leftrightarrow 4x-1+2x^2=-2x^2+2x^2 \Leftrightarrow 2x^2+4x-1=0$.

Järeldus. Võrrandi liikmeid võib viia võrduse ühelt poolt teisele poole, muutes iga üleviidava liikme ees märgi vastupidiseks.

Näide. $3x-8=4 \Leftrightarrow 3x=4+8 \Leftrightarrow 3x=12$.

3. Kui võrrandi mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga, siis saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow cf(x)=cg(x), \text{ kui } c\neq 0;$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{c}=\frac{g(x)}{c}, \text{ kui } c\neq 0.$$

Näide. $\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x=1 \Leftrightarrow 8\cdot\left(\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x\right)=8\cdot 1 \Leftrightarrow 3x^2+6x=8.$

6.1.3. Võrrandi lahendamine. Lahendada võrrand tähendab leida muutuja kõik need väärtused (võrrandi lahendid), mis rahuldavad võrrandit. Võrrandi lahendid moodustavad võrrandi lahendihulga.

Võrrandi lahendamiseks püütakse võrrandit teisendada nii, et iga uus võrrand oleks eelmisega samaväärne. Kui võrrandiga samaväärset võrrandit pole võimalik tuletada, siis asendatakse võrrand niisuguse võrrandiga (või võrranditega), mille lahenditeks on kõik antud võrrandi lahendid ja millel võib lisaks neile olla veel lahendeid. Viimaseid nimetatakse esialgse võrrandi **võõrlahenditeks.** Tuletatud võrrandit nimetatakse esialgse võrrandi järelduseks. Esialgse võrrandi ja järelduse vahele pannakse märk $\Rightarrow$.

Võõrlahendid eraldatakse antud võrrandi tõelistest lahenditest kontrollimisel, asendades muutuja leitud väärtused esialgsesse võrrandisse.

Näide. $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{6} \Rightarrow x(x-1)=6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0.$

Lähtevõrrandi lahendiks on $x=3$, tema järelduse lahendiks aga $x_1=3$ ja $x_2=-2$ (esialgse võrrandi seisukohalt võõrlahend).

Võõrlahendid võivad tekkida siis, kui võrrandi teisendamisel võrrandi määramispiirkond laieneb.

Näiteks võrrand $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{6}$ (lahend $x=3$) on määratud piirkonnas $x\geqslant 1$, sellest tuletatud võrrand $x^2-x-6=0$ (lahendid $x_1=3$, $x_2=-2$) aga piirkonnas $-\infty<x<\infty$.

Teisendused, mille korral uuel võrrandil võib olla rohkem lahendeid kui lähtevõrrandil.

1. Võrrandi mõlema poole korrutamine sama algebralise täisratsionaalse avaldisega.

Näide. Võrrandi $5x-8=2$ lahendiks on $x=2$, võrrandi $(5x-8)\cdot(x-1)=2(x-1)$ lahendeiks aga $x_1=1$ ja $x_2=2$.

2. Võrrandi mõlema poole astendamine positiivse paarisarvuga.

Näide. Võrrandi $3x-2=2-x$ lahendiks on $x=1$, võrrandi $(3x-2)^2=(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2-x=0$ lahendeiks aga $x=1$ ja $x=0$.

3. Võrrandi $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ asendamine võrranditega $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $\ldots$, $f_n(x)=0$.

Näide. $(\sin^2 x-1)\tan x=0 \Rightarrow \sin^2 x-1=0$ või $\tan x=0$, millest vastavalt $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x_2=k\pi$, kus $k\in\mathbf{Z}$. Muutuja väärtused $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ on aga esialgse võrrandi seisukohalt võõrlahendid, sest $\tan x$ ei ole muutuja nende väärtuse korral defineeritud. Seega lahendihulk on $\{x \mid x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

4. Võrrandi $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ asendamine võrrandiga $f(x)=0$.

Näide. $\frac{\sin x}{\cos x-1}=0 \Rightarrow \sin x=0$, sest esialgse võrrandi lahendeiks on $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, tuletatud võrrandi lahendeiks aga nii $x=(2k+1)\pi$ kui ka $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{N}$.

Kui tuletatud võrrandil on lahendeid vähem kui esialgsel võrrandil, siis on tegemist lahendite kaoga. See võib tekkida näiteks võrrandi mõlema poole jagamisel ühe ja sama muutujat sisaldava avaldisega.

Näide. Võrrandi $(x+1)(x-3)=(x-3)$ jagamisel avaldisega $x-3$ tekib lahendi kadu; esialgsel võrrandil on kaks lahendit ($x_1=-1$, $x_2=3$), tuletatud võrrandil $x+1=0$ aga üks lahend ($x=-1$).

Võrrandite lahendamisel ei tohi kasutada teisendusi, millega kaasneb lahendi kadu.

Kui ülesandes ei ole märgitud, millises arvuhulgas tuleb

antud võrrand lahendada, eeldatakse, et otsitakse lahendeid hulgas **R**. Erinevates arvuhulkades võib ühel ja samal võrrandil olla erinev arv lahendeid.

Näide. Võrrandil $x^3-5x^2+7x+13=0$ puudub naturaalarvude hulgas lahend, täisarvude hulgas **Z** (samuti reaalarvude hulgas **R**) on tal üks lahend ($x=-1$). Kompleksarvude hulgas on antud võrrandil kolm lahendit ($x_1=-1$, $x_2=3+2i$, $x_3=3-2i$).

6.1.4. Võrrandite liigitamine. Võrrandis esinevate *muutujate arvu järgi* liigitatakse võrrandid 1) ühe muutujaga võrranditeks ja 2) mitme muutujaga võrranditeks.

Näide. Võrrand $4x^3+8x^2-3x+2=0$ on ühe muutujaga, $2xy^2+8x^3y++4x-2=0$ kahe muutujaga ning $x^3+y^3=z^3$ kolme muutujaga võrrand.

Ühe muutujaga võrrandid liigitatakse:

1) algebralisteks täisratsionaalseteks (algebralisteks);
2) algebralisteks murdratsionaalseteks (murdvõrranditeks);
3) algebralisteks irratsionaalseteks (juurvõrranditeks);
4) transtsendentseteks.

Algebraliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

kus a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 on reaalarvulised kordajad ning n on positiivne täisarv. Liidetavat a_nx^n nimetatakse võrrandi **pealiikmeks**, liiget a_0 aga **vabaliikmeks.**

Kõik lineaar- ja ruutvõrrandid on algebralised võrrandid.

Transtsendentseks võrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab trigonomeetrilist funktsiooni, eksponentfunktsiooni, logaritmfunktsiooni, arkusfunktsiooni jne. määravat avaldist.

Näited. Võrrandid $\sin x-2\tan x=2{,}5$; $2^x-4=0$; $\log^2 x-2\log x=0$; $\arccos x+0{,}8=1$ on transtsendentsed võrrandid.

Võrrandid $x\log 2+4=0$; $x^3\sin\frac{\pi}{2}-\pi x^2=0$ ei ole transtsendentsed võrrandid.

Lahendite arvu järgi liigitatakse võrrandid järgmiselt.

1. Võrrandid, millel lahend puudub. Sellised võrrandid on sisuliselt vastuolulised võrrandid.

Näide. Võrrand $\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$ on vastuoluline, tal puudub lahend (lahendamisel saadav $x=2{,}5$ on võõrlahend). Samuti on vastuoluline võrrand $x-1=3+x$, sest see viib ebaõigele võrdusele $4=0$.

2. Võrrandid, mida rahuldavad muutuja teatud väärtused.

Näiteid. Võrrandit $4x-5=0$ rahuldab vaid muutuja väärtus $x=1{,}25$, võrrandit $x^3-9x=0$ rahuldavad muutuja väärtused $x=-3$, $x=0$, $x=3$, võrrandit $\sin x=0$ rahuldavad muutuja väärtused $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. Võrrandid, mida rahuldavad muutuja kõikvõimalikud väärtused. Sisuliselt on need võrrandid samasused.

Näide. Võrrandit $4(x-1)+5=4x+1$ rahuldavad kõik reaalarvud, sest teisendamisel taandub võrrand õigeks võrduseks, mis ei sisalda muutujat.

6.2. LINEAARVÕRRAND

Ühe muutujaga **lineaarvõrrandiks ehk esimese astme võrrandiks** nimetatakse algebralist võrrandit, mille aste $n=1$. Lineaarvõrrandi üldkuju on

$$ax+b=0,$$

kus $a\neq 0$. Siin ax on lineaarliige ja b vabaliige.

Lineaarvõrrandil on vaid üks lahend

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Näide. $2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

6.3. RUUTVÕRRAND

6.3.1. Ruutvõrrand. Ruutvõrrandiks nimetatakse algebralist võrrandit, mille aste $n=2$. Ruutvõrrandi üldkuju on

$$ax^2+bx+c=0,$$

kus $a\neq0$. Siin a, b, c on kordajad, ax^2 ruutliige, bx lineaarliige, c vabaliige.

Ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendivalem:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Kui ruutvõrrand on kujul $ax^2+2kx+c=0$, on otstarbekas kasutada lahendivalemit

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Avaldist $D=b^2-4ac$ nimetatakse ruutvõrrandi **diskriminandiks.**

Ruutvõrrandil on

1) 2 erinevat lahendit, kui $D>0$,
2) 2 võrdset lahendit, kui $D=0$,
3) lahend puudub, kui $D<0$.

Märkus. Kompleksarvude hulgas **C** on ruutvõrrandil alati kaks lahendit.

6.3.2. Ruutvõrrandi erikujusid. Võrrandit $ax^2+bx+c=0$ nimetatakse taandamata ruutvõrrandiks, kui $a\neq1$, ja taandatud ruutvõrrandiks, kui $a=1$. Taandatud ruutvõrrand kirjutatakse kujul

$$x^2+px+q=0,$$

mille lahendivalem on

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Diskriminant $D=\frac{p^2}{4}-q$.

Võrrandit $ax^2+bx+c=0$ nimetatakse täielikuks ruutvõrrandiks, kui $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$, ja mittetäielikuks ruutvõrrandiks, kui $a\neq0$, kuid üks või mõlemad kordajatest b ja c on nullid.

Mittetäielikud ruutvõrrandid:

1) $ax^2+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

2) $ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$;

3) $ax^2=0\Rightarrow x_1=x_2=0$.

6.3.3. Ruutvõrrandi lahendite omadused — Viete'i (*loe: vjeeti*) ***teoreem***

1. Taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub lineaarliikme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega. Võrrandi $x^2+px+q=0$ korral

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

2. Kui x_1 ja x_2 on võrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid, siis

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

6.3.4. Ruutvõrrandi abil lahenduvaid võrrandeid. Kolmeliikmeline võrrand

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

kus $a\neq0$, $b\neq0$, taandub asendusega $x^n=y$ ruutvõrrandiks

$$ay^2+by+c=0.$$

Edasi lahendame kaheliikmelised võrrandid $x^n=y_1$ ja $x^n=y_2$, kus y_1 ja y_2 on võrrandi $ay^2+by+c=0$ lahendid.

Näide. Võrrandi $x^6-7x^3-8=0$ lahendamiseks asendame $x^3=y$, mille tulemusena tekib võrrand $y^2-7y-8=0$. Viimasest $y_1=-1$, $y_2=8$. Kasutades seost $x^3=y$, saame esialgse võrrandi reaalarvulised lahendid: $x_1=-1$, $x_2=2$.

Kui kolmeliikmelises võrrandis $n=2$, saame **biruutvõrrandi**

$$ax^4+bx+c=0,$$

mille lahendamiseks asendame $x^2=y$.

Näide. Võrrandi $x^4-3x^2-4=0$ asemel lahendame ruutvõrrandi $y^2-3y-4=0$. Et $y_1=-1$ ja $y_2=4$, siis seosest $x^2=y$ saame, et $x_1=-2$, $x_2=2$ ($y_1=-1$ lahendeid ei anna).

Ruutvõrrandi abil lahenduvad ka mõningad transtsendentsed võrrandid.

6.4. KUUPVÕRRAND

Kuupvõrrandiks nimetatakse algebralist võrrandit kujul

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

kus $a\neq0$ ja a, b, c, d on reaalarvud.

Asendusega

$$x=y-\frac{b}{3a}$$

saab täieliku kuupvõrrandi teisendada kujule

$$y^3+py+q=0,$$

mille lahendivalemid (Cardano valemid) on:

$$y_1=u+v,$$

$$y_2=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\,\mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$y_3=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\,\mathrm{i}\sqrt{3},$$

kus $u=\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$,

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Diskriminant $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Kuupvõrrandil on 1) üks reaalarvuline ja kaks kompleksarvulist lahendit, kui $D>0$, 2) kolm reaalarvulist lahendit, millest kaks on võrdsed, kui $D=0$, 3) kolm erinevat reaalarvulist lahendit, kui $D<0$.

Näide. $x^3-3x^2+4x-4=0$. Asendus $x=y-\frac{-3}{3}$ ehk $x=y+1$.

Nüüd $y^3+y-2=0$, kus $p=1$, $q=-2$ ja $u\approx1{,}264$, $v\approx-0{,}264$. $y_1=1\Rightarrow x_1=2$; $y_2=-0{,}5+0{,}764\,\mathrm{i}\sqrt{3}\Rightarrow x_2=0{,}5+0{,}764\,\mathrm{i}\sqrt{3}$; $y_3=-0{,}5-0{,}764\,\mathrm{i}\sqrt{3}\Rightarrow x_3=0{,}5-0{,}764\,\mathrm{i}\sqrt{3}$.

6.5. KÕRGEMA ASTME VÕRRAND

6.5.1. Kõrgema astme võrrand. Kõrgema astme võrrandiks nimetatakse algebralist võrrandit

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

kus $a_n\neq0$ ja võrrandi aste $n\geqslant4$.

Neljanda astme võrrandi ($n=4$)

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

lahendamiseks on olemas vastavad valemid, kuid neid pole keerukuse tõttu otstarbekas kasutada.

Algebraliste võrrandite jaoks, mille aste $n\geqslant5$, ei leidu lahendivalemeid, kus lahendid avalduksid võrrandi kordajate kaudu radikaalides (juurtena). Seetõttu lahendatakse kõrgema astme võrrandeid üldiselt ligikaudsete võtetega, s. t. meetoditega, mis võimaldavad leida võrrandi lahendeid kuitahes suure täpsusega. Mõningaid kõrgema astme võrrandeid on võimalik lahendada ainult neile omaste erivõtetega.

6.5.2. Lauseid algebralise võrrandi kohta

1. ***Algebra põhiteoreem.*** Igal n-nda astme algebralisel võrrandil

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \qquad (1)$$

on kompleksarvude hulgas n lahendit, kui lugeda kordsed (võrdsed) lahendid erinevateks.

Võrrandi (1) k-kordseks lahendiks nimetatakse arvu x_0, kui võrrandi vasak pool jagub avaldisega $(x-x_0)^k$.

Järeldus. Igal n-nda astme algebralisel võrrandil on reaalarvude hulgas kas n või vähem kui n lahendit.

Näide. Võrrandil $4x^4+28x^3+73x^2+90x+50=0$ on kompleksarvude hulgas neli lahendit: $x_1=x_2=-2{,}5$, $x_3=1-\mathrm{i}$, $x_4=1+\mathrm{i}$, reaalarvude hulgas aga kaks võrdset lahendit $x_1=x_2=-2{,}5$.

2. Kui reaalarvuliste kordajatega algebralise võrrandi lahendiks on kompleksarv $a+b\mathrm{i}$, siis on selle võrrandi lahendiks ka kompleksarv $a-b\mathrm{i}$.

Järeldusi. 1. Kui reaalarvuliste kordajatega algebralisel võrrandil leidub kompleksarvulisi lahendeid, siis on neid paarisarv.

2. Igal reaalarvuliste kordajatega paarituarvulise astmega $(n=2k+1)$ algebralisel võrrandil $a_{2k+1}x^{2k+1}+a_{2k}x^{2k}+\ldots+a_1x+a_0=0$ on vähemalt üks reaalarvuline lahend.

Näide. Võrrandil $2x^3+9x^2+14x+10=0$ on vaid üks reaalarvuline lahend $x=-2{,}5$.

3. Taandatud algebralisel võrrandil $(a_n=1)$, mille kordajad on täisarvud, on ratsionaalarvude hulgas vaid täisarvulised lahendid, mis on võrrandi vabaliikme tegureiks.

Näide. Leiame võrrandi $x^3+4x^2+x-6=0$ lahendid. Et võrrand on taandatud ja täisarvuliste kordajatega, siis peavad tema lahendid olema vabaliikme -6 tegurite seast, s. t. ±1, ±2, ±3 või ±6. Vahetu kontroll näitab, et võrrandit rahuldavad muutuja väärtused $x=1$, $x=-2$, $x=-3$. Algebra põhiteoreemi kohaselt ei saa antud võrrandil rohkem lahendeid olla.

Tuginedes viimasele omadusele, saab leida ka taandamata algebralise võrrandi ratsionaalarvulisi lahendeid, kui teha enne sobiv muutujavahetus.

Näide. Lahendame võrrandi $2x^3-x^2+2x-1=0$.

Korrutame antud võrrandit 4-ga ning teeme muutujavahetuse

$2x=y$, mille tulemusena saame taandatud võrrandi

$$y^3-y^2+4y-4=0.$$

Lause 3 põhjal võivad selle võrrandi lahendeiks olla üksnes arvud ±1, ±2, ±4. Vahetu kontroll näitab, et võrrandit rahuldab vaid väärtus $y=1$. Seega on esialgse võrrandi ainsaks ratsionaalarvuliseks lahendiks $x=1:2=0{,}5$.

6.5.3. Kaheliikmeline võrrand on algebraline võrrand kujul

$$ax^n+b=0,$$

kus $a\neq0$.

Vastavalt sellele, kas n on paaris või paaritu arv, on

$$x=\pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \quad \text{või} \quad x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

6.7. MURDVÕRRAND

Murdvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles muutuja esineb murru nimetajas. Murdvõrrand saab pärast samasusteisendusi kuju

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Murdvõrrandi lahendamiseks lahendatakse võrrand

$$f(x)=0,$$

mis on esialgse võrrandi järeldus. Et muutuja x lubatavate väärtuste hulk tuleneb seosest $g(x)\neq0$, siis tuleb murdvõrrandi lahendamisel alati kontrollida, kas saadud muutuja väärtused on esialgse võrrandi lahendeiks või mitte.

Näide. Lahendame võrrandi $\frac{x^2-x}{x-3}-\frac{2x}{x-3}+2=0$.

Viime võrrandi vasakul poolel seisvad avaldised ühisele nimetajale:

$\frac{x^2-x-6}{x-3}=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=3.$

Neist $x=-2$ on esialgse võrrandi lahend, $x=3$ on aga võõrlahend (nimetaja saab $x=3$ korral nulliks).

6.7. JUURVÕRRAND

6.7.1. Juurvõrrand. Juurvõrrandiks nimetatakse võrrandit, kus muutuja esineb juuritavas.

Näiteks võrrandid $\sqrt{4x-1}+4x=8$ ja $\sqrt{x^2}=1$ on juurvõrrandid, kuid võrrand $x\sqrt{7}+1=2$ ei ole juurvõrrand.

Juurvõrrandi lahendamiseks astendatakse enne sobivalt teisendatud võrrandi mõlemat poolt ühe ja sama astendajaga.

Lahendamisel saadud muutuja väärtusi tuleb tingimata esialgse võrrandi abil kontrollida, sest võrrandi mõlema poole astendamisel paarisarvuga on *võimalus võõrlahendite tekkeks.*

6.7.2. Näiteid juurvõrrandite lahendamisest

1. Lahendame võrrandi $\sqrt{x^2}=3$.

Et $\sqrt{x^2}=|x|$, siis $|x|=3$, millest $x=3$ (kui $x\geqslant 0$) või $-x=3$ (kui $x<0$) ehk $x=-3$. Kontrollimisel selgub, et lahendeiks on $x=-3$ ja $x=3$.

2. Lahendame võrrandi $\sqrt{x-2}+x=4$.

Jätame võrrandi vasakule poolele vaid juuravaldise ning tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\sqrt{x-2}=4-x \Rightarrow x-2=(4-x)^2 \Rightarrow x^2-9x+18=0.$$

Viimase võrrandi lahendid on $x=3$ ja $x=6$. Neist teine osutub esialgse võrrandi võõrlahendiks. Seega lahend on $x=3$.

3. Lahendame võrrandi $\sqrt{x+4}-\sqrt{9-x}+1=0$.

Lahendamiseks on kaks võimalust:

1) $\sqrt{x+4}=\sqrt{9-x}-1 \Rightarrow x+4=(9-x)-2\sqrt{9-x}+1 \Rightarrow \sqrt{9-x}=3-x \Rightarrow 9-x=9-6x+x^2 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x=0$ ja $x=5$. Esialgse võrrandi lahendiks on vaid $x=0$.

2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{9-x}=-1$. Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu. Siis

$$x+4-2\sqrt{(x+4)(9-x)}+9-x=1 \Rightarrow \sqrt{(x+4)(9-x)}=6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+4)(9-x)=36 \Rightarrow x=5 \text{ (võõrlahend)},\ x=0.$$

4. Lahendame võrrandi $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x+8}-3=0$.

Lahendame ülesande kahel viisil.

1. Viime arvu 3 paremale poole võrdusmärki ning tõstame võrrandi mõlemad pooled kuupi. Siis

$$1-x+3\sqrt[3]{(1-x)^2}\sqrt[3]{x+8}+3\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{(x+8)^2}+x+8=27 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x+8}(\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x+8})=6.$$

Esialgsest võrrandist saame, et sulgavaldise väärtus on 3. Seega omandab võrrand kuju

$$\sqrt[3]{(1-x)(x+8)}=2 \Rightarrow (1-x)(x+8)=8.$$

Viimase võrrandi lahendid $x=-7$, $x=0$ on ka esialgse võrrandi lahenditeks.

2. Asendame $\sqrt[3]{1-x}=u$ ja $\sqrt[3]{x+8}=v$. Siis $u+v=3$ ja $u^3+v^3=9$, sest $u^3=1-x$ ja $v^3=x+8$. Saadud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$$

lahendamiseks asendame teises võrrandis $u=3-v$. Nüüd $v^2-3v+2=0$, millest $v_1=1$ ja $v_2=2$. Et $v=\sqrt[3]{x+8}$, siis vastavalt v väärtustele $x_1=-7$ ja $x_2=0$.

Vaadeldud võtet on sobiv kasutada siis, kui u^n+v^n või u^n-v^n on konstant.

5. Lahendame võrrandi $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=-2$.

Lahendid puuduvad, sest võrrand on vastuoluline. Vasak pool on muutuja lubatavatel väärtustel positiivne (kahe positiivse arvu summa), parem pool aga negatiivne.

6.8. EKSPONENTVÕRRAND

Eksponentvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles muutuja esineb astendajas.

Näiteks võrrand $4\cdot 3^x+8\cdot 0{,}1^x-4=0$ on eksponentvõrrand.

Eksponentvõrrandi lahendamiseks puuduvad üldised võtted, seetõttu vaatleme vaid mõningaid e r i v õ t t e i d.

1. Võrrandi viimine ühe ja sama alusega astmete võrdusele.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $0{,}125^{x-1}=2^{4x}$.

Teisendame võrrandit:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}=2^{4x} \Rightarrow 2^{-3x-3}=2^{4x}.$$

Võrdsete alustega astmete võrdsusest järeldub astendajate võrdsus, $-3x-3=4x$, millest $x=-\frac{3}{7}$.

2. Kui eksponentvõrrand on a^x või $a^{f(x)}$ suhtes algebraline võrrand, siis lahendame selle vastavalt a^x või $a^{f(x)}$ suhtes, millega taandame antud eksponentvõrrandi ühele või mitmele võrrandile kujul $a^x=b$ või $a^{f(x)}=b$.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $3^{4x-1}-3^{2x-1}-2=0$.

Teisendame võrrandit:

$$3^{4x}\cdot 3^{-1}-3^{2x}\cdot 3^{-1}-2=0 \Rightarrow 3^{4x}-3^{2x}-6=0.$$

Saadud võrrand on ruutvõrrand 3^{2x} suhtes (võib teha ka vastava asenduse $3^{2x}=u$), mille lahenditeks $3^{2x}=3$ ja $3^{2x}=-2$. Neist viimane on vastuoluline. Võrrandist $3^{2x}=3 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=0{,}5$. Lahend rahuldab võrrandit.

3. Sulgude ette toomise võte.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $5^{2x+1}+2\cdot 5^{2x}+5^{2x-1}=900$.

Võtame võrrandi vasakul poolel sulgude ette 5^{2x-1}. Siis $5^{2x-1}(25+10+1)=900 \Rightarrow 5^{2x-1}=5^2 \Rightarrow 2x-1=2 \Rightarrow x=1{,}5$.

Lahend rahuldab võrrandit.

4. Logaritmimisvõte.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $1{,}995^x=3{,}02$.

Logaritmime võrrandit:

$$x \log 1{,}995=\log 3{,}02 \Rightarrow x=\frac{\log 3{,}02}{\log 1{,}995}=\frac{0{,}48}{0{,}30}=1{,}6.$$

6.9. LOGARITMVÕRRAND

Logaritmvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles muutuja esineb logaritmitavas või logaritmi aluses.

Logaritmvõrrandi l a h e n d a m i s e k s puuduvad üldised võtted. Logaritmvõrrandit teisendatakse artiklis 5.7.1. esitatud valemite abil tavaliselt nii, et see saab kuju

$$\log_a f(x)=c \quad \text{või} \quad \log_a f(x)=\log_a g(x),$$

millest logaritmi definitsiooni või potentseerimise teel saadakse vastavalt võrrand

$$f(x)=a^c \quad \text{või} \quad f(x)=g(x).$$

Et lahendamisel võib tekkida esialgsele võrrandile võõrlahendeid, tuleb saadud l a h e n d e i d alati k o n t r o l l i d a.

N ä i d e 1. Lahendame võrrandi $\log(x+1)+\log(x-1)-\log(2x+5)=\log 3$.

Kirjutame võrrandi kujul

$$\log\frac{(x+1)(x-1)}{2x+5}=\log 3,$$

millest

$$\frac{x^2-1}{2x+5}=3.$$

Lahendanud ruutvõrrandi, saame, et $x_1=8$, $x_2=-2$. Neist $x=8$ on esialgse võrrandi lahend, $x=-2$ aga mitte.

N ä i d e 2. Lahendame võrrandi $\log_{x+1}4=2$.

Logaritmi definitsiooni põhjal

$$(x+1)^2=4,$$

millest $x+1=\pm 2$ ehk $x_1=1$, $x_2=-3$ (võõrlahend).

N ä i d e 3. Lahendame võrrandi $2\ln^2 x-5\ln x+3=0$.

Võrrand on $\ln x$ suhtes ruutvõrrand. Lahendamisel saame, et $\ln x=1$ ja $\ln x=1{,}5$, millest omakorda $x_1=e$, $x_2=\sqrt{e^3}$.

6.10. TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID

6.10.1. Trigonomeetriline võrrand. Trigonomeetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit, milles muutuja esineb vaid trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Näiteks võrrand $2\sin 2x+\cos x-1=0$ on trigonomeetriline võrrand, võrrand $x\sin 1+x^2\cos\pi=0$ aga ei ole trigonomeetriline võrrand.

Võrrandeid

$$\begin{aligned}&\sin x=a, && |a|\leqslant 1,\\ &\cos x=a, && |a|\leqslant 1,\\ &\tan x=a,\\ &\cot x=a\end{aligned}$$

nimetatakse **trigonomeetrilisteks põhivõrranditeks.**

6.10.2. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamine. Üldised lahendusvõtted selle jaoks puuduvad, mistõttu vaatleme mõningaid erivõtteid.

1. Trigonomeetriliste põhivõrrandite lahendamine:
$\sin x=a$, kui $|a|\leqslant 1$, siis $x=(-1)^n\arcsin a+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$;
$\cos x=a$, kui $|a|\leqslant 1$, siis $x=\pm\arccos a+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$,
$\tan x=a$, siis $x=\arctan a+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$;
$\cot x=a$, siis $x=\operatorname{arccot} a+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Näide. $\tan x=\sqrt{3}$.

Et $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, siis $x=\frac{\pi}{3}+n\pi$ ehk $x=(3n+1)\frac{\pi}{3}$, kus $n\in\mathbf{Z}$.

Keerukamate trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel teisendatakse võrrandit nii, et see taanduks lõpuks ühele või mitmele põhivõrrandile.

2. Võrdlusmeetod võrrandite lahendamisel.
Kui $\sin x=\sin\alpha$, siis $x=(-1)^n\alpha+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$;
kui $\cos x=\cos\alpha$, siis $x=\pm\alpha+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$;
kui $\tan x=\tan\alpha$, siis $x=\alpha+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$;
kui $\cot x=\cot\alpha$, siis $x=\alpha+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Näiteid. 1) $\cos 2x=\cos 0{,}38\Rightarrow 2x=\pm 0{,}38+2n\pi\Rightarrow$
$\Rightarrow x=\pm 0{,}19+n\pi$;
2) $\tan 7x=\tan 6x\Rightarrow 7x=6x+n\pi\Rightarrow x=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. Kui trigonomeetriline võrrand on mingi trigonomeetrilise funktsiooni suhtes algebraline võrrand, siis lahendatakse see võrrand temas esineva trigonomeetrilise funktsiooni suhtes. Tulemusena saadakse põhivõrrandid või neile vahetult taanduvad võrrandid.

Näide. $5\cos^2 x+21\cos x-20=0$.

Lahendame antud võrrandi kui ruutvõrrandi $\cos x$ suhtes. Tulemusena saame võrrandid $\cos x=0{,}8$ ja $\cos x=-5$, millest esimene annab lahendi $x=\pm 36°52'+n\cdot 360°$, $n\in\mathbf{Z}$, teine on aga vastuoluline.

Mõned trigonomeetrilised võrrandid kujutavad endast algebralisi võrrandeid keerukama avaldise suhtes.

Näide. $\dfrac{\tan^2 6x}{\tan^2 3x}+2\dfrac{\tan 6x}{\tan 3x}+1=0$.

Tegemist on ruutvõrrandiga $\dfrac{\tan 6x}{\tan 3x}=z$ suhtes. Lahendades selle (z suhtes), saame võrrandi

$$\frac{\tan 6x}{\tan 3x}=-1\Rightarrow\tan 6x=\tan(-3x).$$

Võrrandi edasine lahendamine toimub 2. juhu kohaselt. Lahendit tuleb kontrollida.

Trigonomeetriline võrrand teiseneb sageli algebraliseks võrrandiks, kui minna üle ühe ja sama argumendi ühele ja samale trigonomeetrilisele funktsioonile.

Näide 1. $\dfrac{\sin^2 2x-\sin 2x}{\cos x}-2\sin x=0\Rightarrow\sin^2 2x-\sin 2x-2\sin x\cos x=$
$=0\Rightarrow\sin^2 2x-2\sin 2x=0$. Oleme saanud mittetäieliku ruutvõrrandi $\sin 2x$ suhtes.

Näide 2. $\cos x\cdot\cos 2x=\cos 3x$.

Teisendame vasakul oleva korrutise summaks ning läheme üle nurgale x. Tulemusena saame algebralise võrrandi $\cos x$ suhtes:

$$\cos^3 x-\cos x=0.$$

Algebralisele võrrandile tangensfunktsiooni suhtes jõutakse siis, kui võrrandi teisendamisel kasutatakse valemeid artiklist 12.10.

Näide. $2\sin x+\cos x+2=0$.

Asendame $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ja $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, kus $t=\tan\frac{x}{2}$, siis võrrand saab kuju

$$t^2+4t+3=0,$$

kus $t=\tan\frac{x}{2}$.

4. Võrrandid, mille vasak pool teisendub korrutiseks ning parem pool on null.

Näide. $\cos 4x+\cos 2x=0$.

Teisendame võrrandi vasaku poole korrutiseks. Siis $2\cos 3x\cdot\cos x=0$, millest $\cos 3x=0$ või $\cos x=0$.

5. Trigonomeetrilist võrrandit nimetatakse homogeenseks, kui see esitub kujul

$$a_n\sin^n x+a_{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\ldots+a_1\sin x\cos^{n-1}x+$$
$$+a_0\cos^n x=0,$$

kus a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 on reaalarvud ning n naturaalarv.

Homogeenne võrrand taandub $\tan x$ suhtes algebraliseks võrrandiks, kui võtta võrrandis $\cos^n x$ sulgude ette.

Näide. $3\sin^2 x\cos x-\cos^3 x=0$.

Lahendamiseks võtame $\cos^3 x$ sulgude ette:

$\cos^3 x(3\tan^2 x-1)=0\Rightarrow\cos^3 x=0$ ja $3\tan^2 x-1=0$.

6. Võrrand kujul $a\cos x+b\sin x=c$.

Võrrandit saab

1) taandada algebraliseks võrrandiks $\tan\frac{x}{2}$ suhtes:

$$(a+c)\tan^2\frac{x}{2}-2b\tan\frac{x}{2}-(a-c)=0;$$

2) lahendada abinurga võttega. Selleks esitame võrrandi kujul $\cos x+\frac{b}{a}\sin x=\frac{c}{a}$. Asendame $\frac{b}{a}=\tan\varphi$, siis $\cos x+\tan\varphi\sin x=\frac{c}{a}\Rightarrow\cos x\cos\varphi+\sin\varphi\sin x=\frac{c}{a}\cos\varphi\Rightarrow\cos(x-\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi$. Suurust $\cos\varphi$ saab arvutada $\tan\varphi$ kaudu:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nüüd

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

millest

$$x=\arctan\frac{b}{a}+\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

6.11. VÕRRANDI GRAAFILINE LAHENDAMINE

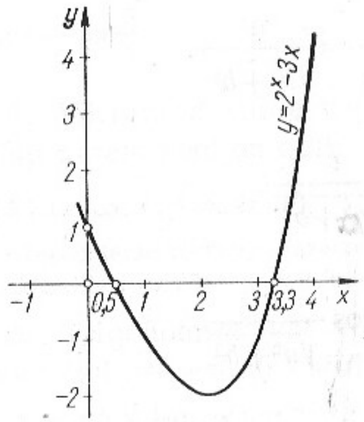
Võrrandi graafilisel lahendamisel saadakse võrrandi lahendid ligikaudsetena.

1. Kui on antud võrrand kujul $f(x)=0$, konstrueeritakse funktsiooni $y=f(x)$ graafik ning leitakse jooniselt selle lõikepunktid x-teljega (funktsiooni nullkohad).

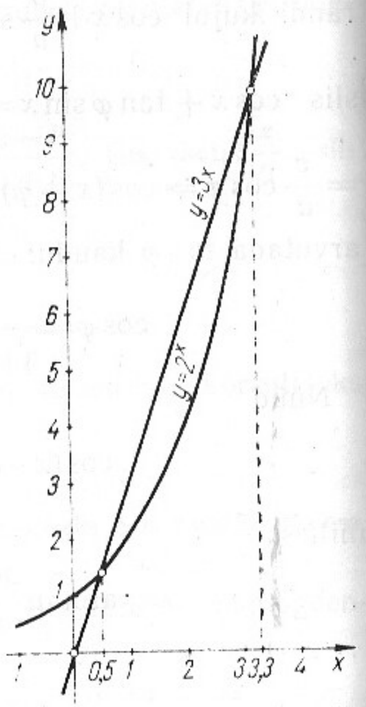
Näide. Lahendame graafiliselt võrrandi $2^x-3x=0$.

Konstrueerime üksikute punktide kaudu funktsiooni $y=2^x-3x$ graafiku (joon. 6.1). Jooniselt näeme, et võrrandi lahendid on $x=0{,}5$ ja $x=3{,}3$.

2. Võrrandi võib esitada kujul $f(x)=g(x)$, konstrueerida funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ graafikud ning leida jooniselt nende lõikepunktide abstsissid. Võimalike vigade vältimiseks graafikute konstrueerimisel tuleks võrrandit teisendada nii, et funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ graafikud oleksid võimalikult tuttava kujuga.



Joon. 6.1



Joon. 6.2

Näide. Lahendame graafiliselt võrrandi $2^x - 3x = 0$.

Esitame võrrandi kujul $2^x = 3x$, konstrueerime funktsioonide $y=2^x$ ja $y=3x$ graafikud (joon. 6.2) ning leiame jooniselt graafikute lõikepunktide abstsissid. Need on $x=0{,}5$ ja $x=3{,}3$ (vt. ka eelmist näidet).

6.12. LINEAARVÕRRANDISÜSTEEM

16.2.1. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteem. Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi üldkuju on

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Lineaarvõrrandisüsteemi lahendiks on iga arvupaar $(x; y)$, mis rahuldab süsteemi mõlemat võrrandit.

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 4x+10y=6 \\ x-2y=15 \end{cases}$$

lahendiks on arvupaar $x=9$, $y=-3$ ehk lühemalt $(9; -3)$.

Lineaarvõrrandisüsteemi nimetatakse homogeenseks, kui võrrandite vabaliikmed c_1 ja c_2 on nullid. Homogeense süsteemi üldkuju:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0. \end{cases}$$

Sellel süsteemil on alati vähemalt üks lahend, nn. nullahend $(0; 0)$.

Lahendusvõtteid.

1. Asendusvõtte korral avaldatakse ühest võrrandist üks muutuja teise kaudu ning asendatakse teise võrrandisse. Tulemusena saadakse ühe muutujaga võrrand.

Näide. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ x-2y=15. \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist muutuja x ning asendame esimesse võrrandisse:

$$x=15+2y,\ 2(15+2y)+5y=3 \Rightarrow y=-3.$$

Asendusest $x=15+2y \Rightarrow x=15+2\cdot(-3) \Rightarrow x=9$. Lahendiks on arvupaar $(9; -3)$.

2. Liitmisvõtte kasutamisel korrutatakse süsteemi võrrandite mõlemaid pooli niisuguste arvudega, et pärast võrrandite liitmist (või ka lahutamist) oleks ühe muutuja kordaja null. Nii tekib ühe muutujaga lineaarvõrrand.

Näide. Lahendame eelmise näite liitmisvõttega. Ülesande lahenduse vormistame järgmiselt:

$$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ x-2y=15 \mid \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+5y=3 \\ -2x+4y=-30 \end{cases}$$

$$9y=-27$$

$$y=-3$$

$x=15+2y=15+2\cdot(-3)=9$. Lahendiks on $(9; -3)$.

3. Lahendamine determinantide abil.

Süsteemi (1) lahend on

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \end{cases}$$

kus

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

M ä r k u s. Võtet saab kasutada siis, kui $D\neq 0$.

N ä i d e. Lahendame determinantide abil

$$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ x-2y=15. \end{cases}$$

Et

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-9, \quad D_x=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}=-81, \quad D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}=27,$$

siis lahend on

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-81}{-9}=9, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{27}{-9}=-3.$$

6.12.2. Kolme muutujaga lineaarvõrrandisüsteem. Kolme muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi üldkuju on

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Kolme muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi l a h e n d i k s on iga arvukolmik $(x;\ y;\ z)$, mis rahuldab süsteemi kõiki võrrandeid.

Kui $d_1=d_2=d_3=0$, siis nimetatakse süsteemi homogeenseks. Homogeensel süsteemil on alati vähemalt üks lahend $x=y=z=0$ ehk $(0;\ 0;\ 0)$.

L a h e n d u s v õ t t e i d.

1. Ühe muutuja elimineerimise võte.

Võrrandisüsteemi (2) teisendatakse nii, et see taan-

duks kahe muutujaga kahest lineaarvõrrandist koosnevaks süsteemiks, mis lahendatakse artiklis 6.12.1. esitatud viisil.

Ühe muutuja elimineerimiseks avaldatakse ühest võrrandist üks muutuja ülejäänute kaudu ning asendatakse teistesse võrranditesse või korrutatakse võrrandeid nullist erinevate arvudega nii, et võrrandite paarikaupa liitmisel saadakse kaks võrrandit, milles puudub sama muutuja.

N ä i d e. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x-2y+3z=15 \\ 3x+3y-4z=-9 \\ 5x-2y-\ \ z=9. \end{cases}$$

Vaatleme kaht lahendusviisi.

A. Kolmandast võrrandist $z=5x-2y-9$ asendame muutuja z ülejäänud võrranditesse.

$$\begin{cases} 2x-2y+3(5x-2y-9)=15 \\ 3x+3y-4(5x-2y-9)=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17x-\ \ 8y=42 \\ -17x+11y=-45. \end{cases}$$

Tekkinud (kahe muutujaga) võrrandisüsteemi lahendame liitmisvõttega. Siis

$$3y=-3 \Rightarrow y=-1.$$

Võrrandist $17x-8y=42 \Rightarrow x=2$ ning võrrandist $z=5x-2y-9 \Rightarrow$ $\Rightarrow z=3$. Seega lahendiks on $(2;\ -1;\ 3)$.

B. Muutuja y elimineerimiseks teisendame süsteemi järgmiselt:

$$\begin{cases} 2x-2y+3z=15 \\ 5x-2y-\ \ z=9 \ \ |\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y+3z=15 \\ -5x+2y+\ \ z=-9 \end{cases}$$

$$-3x \qquad +4z=6$$

$$\begin{cases} 2x-2y+3z=15 \ \ |\cdot 3 \\ 3x+3y-4z=-9 \ \ |\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-6y+9z=45 \\ 6x+6y-8z=-18 \end{cases}$$

$$12x \qquad +\ \ z=27$$

Esialgne süsteem taandus süsteemiks

$$\begin{cases} -3x+4z=6 \\ 12x+\ \ z=27, \end{cases}$$

mille lahendamisel $x=2$, $z=3$. Esialgse süsteemi ühest (näiteks esimesest) võrrandist saame, et $y=-1$ ning lahendiks on $(2;\ -1;\ 3)$.

2. Determinantide abil lahendamine.

Süsteemi (2) lahendiks on

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \\ z=\dfrac{D_z}{D} \end{cases}$$

kus

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6.13. VÕRRANDISÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE

Kahest kahe muutujaga võrrandist koosneva süsteemi

$$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ G(x, y)=0 \end{cases}$$

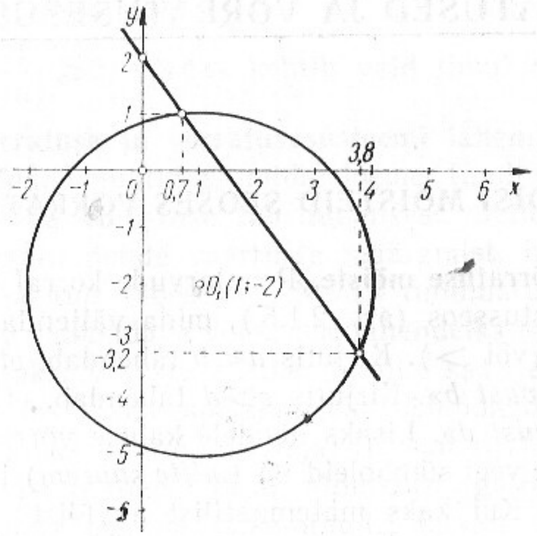
lahendamine taandub geomeetriliselt võrranditega $F(x, y)=0$ ja $G(x, y)=0$ määratud joonte konstrueerimisele ning jooniselt nende lõikepunktide koordinaatide leidmisele. Joonte iga lõikepunkti koordinaadid on antud võrrandisüsteemi lahendiks. Et mõõtmisel tekib alati teatav viga, siis on graafiliselt saadud lahendid reeglina ligikaudsed.

Näide. Lahendame graafiliselt võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2-2x+(y+2)^2-8=0 \\ 4x=6-3y. \end{cases}$$

Kirjutame süsteemi kujul

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=9 \\ 4x+3y-6=0. \end{cases}$$



Joon. 6.3

Esimene võrrand määrab ringjoone, mille keskpunkt on (1; —2) ja raadius 3. Teine võrrand määrab sirge. Konstrueerinud need jooned (joon. 6.3), leiame jooniselt võrrandisüsteemi (ligikaudsed) lahendid. Need on (0,7; 1) ja (3,8; —3,2).

7. VÕRRATUSED JA VÕRRATUSESÜSTEEMID

7.1. ÜLDISI MÕISTEID SEOSES VÕRRATUSTEGA

7.1.1. Võrratuse mõiste. Reaalarvude korral on defineeritud järjestusseos (art. 2.1.5.), mida väljendatakse sümboliga $<$ (või $>$). Kirjutis $a<b$ tähendab, et *«arv a on väiksem arvust b»*. Kirjutis $c>d$ tähendab, et *«arv c on suurem arvust d»*. Lisaks nendele kahele võrratusmärgile kasutatakse veel sümboleid $\leqslant$ (*mitte suurem*) ja $\geqslant$ (*mitte väiksem*). Kui kaks matemaatilist avaldist (sealhulgas reaalarvu) on seotud ühega neist neljast sümbolist, siis kõneleme **võrratusest.**

Näiteid. $5>0$; $4a+2\geqslant -1$; $3x^2-1<8$; $\sin 4x+2a\leqslant 9$.

7.1.2. Võrratuste üldisi omadusi

1. Kui $a>b$, siis $b<a$.
2. Kui $a>b$ ja $b>c$, siis $a>c$.
3. Kui $a>b$, siis $a+c>b+c$, s. t. võrratuse mõlemale poolele või liita ühe ja sama avaldise (arvu, muutuja jne.).
4. Kui $a>b$ ja $c>d$, siis $a+c>b+d$.
5. Kui $a>b$ ja $c<d$, siis $a-c>b-d$.
6. Kui $a>b$ ja $m>0$, siis $ma>mb$.
7. Kui $a>b$ ja $m<0$, siis $ma<mb$.
8. Kui $a>b>0$ või $b<a<0$, siis $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
9. Kui $a>b>0$ ja $c>d>0$, siis $ac>bd$.
10. $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$.
11. $|a|>b>0 \Leftrightarrow a<-b \vee a>b$.
12. $|a|\geqslant a$.
13. $|a+b|\leqslant |a|+|b|$.
14. $|a+b|\geqslant |a|-|b|$.
15. $|a-b|\leqslant |a|+|b|$.

16. $|a-b|\geqslant |a|-|b|$.
17. $|a|+\frac{1}{|a|}\geqslant 2$, võrdus kehtib vaid juhul $a=1$.

7.1.3. Võrratuse ja võrratusesüsteemi lahend. Kui võrratus sisaldab muutujat, mida loeme tundmatuks, siis saame kõnelda **võrratuse lahendamisest.** Selle all mõistame tundmatu nende väärtuste määramist, mille korral võrratus osutub tõeseks. Neid tundmatu väärtusi nimetatakse vaadeldava võrratuse **lahendeiks** ja kõiki koos **lahendihulgaks.** Võrratuse lahendihulka saab esitada mitmeti. Võib kasutada spetsiaalseid sümboleid vahemiku, lõigu jne. jaoks (näited 1, 3 ja 4), samuti üldist hulga esitamise viisi (näited 1 ja 2). Mõnikord aga osutub kõige loomulikumaks esitada lahendihulk lihtsalt võrratusega (näiteks $x<0$) või kujutada see arvteljel.

Näide 1. Lahendada võrratus $x^2<9$.

Antud võrratus on tõene, kui $|x|<3$ ehk $-3<x<3$. Lahendihulk on $X=\{x|-3<x<3\}=]-3;\ 3[$.

Näide 2. Lahendada võrratus $2^{z-4}<1$.

Et $1=2^0$, siis võime võrratuse esitada kujul $2^{z-4}<2^0$. Funktsioon $y=2^x$ on rangelt kasvav, seega viimane võrratus on samaväärne võrratusega $z-4<0$, millest $z<4$. Võrratuse lahendihulk on $X=\{z|z<4\}$.

Näide 3. Lahendada võrratus $\sin(2x^2-3)\leqslant 2$.

Siinus on ühest väiksem argumendi iga väärtuse korral, seetõttu on lahendihulgaks hulk **R**.

Näide 4. Võrratuse $x^2+1<0$ lahendihulk on tühi, sest ei leidu ühtki reaalarvu x, mille korral antud võrratus oleks tõene.

Võrratusesüsteemi lahendihulgaks on selle süsteemi üksikute võrratuste *lahendihulkade ühisosa.*

Kui võrratus (või võrratusesüsteem) sisaldab *kaht muutujat*, siis mõistame lahendihulgana *muutujate* nende väärtuste paaride hulka (geomeetriliselt *tasandi punktide hulka*), mille korral antud võrratus on tõene.

Näide 5. Võrratuse $x^2+y^2<1$ lahendihulga moodustavad selle ringi sisepunktid (ringjoon mitte), mille keskpunkt on koordinaatide alguses ja raadius on 1.

7.1.4. Üldised printsiibid ja reeglid võrratuste lahendamisel. Samu muutujaid sisaldavaid võrratusi (võrratusesüsteeme) nimetatakse **samaväärseteks,** kui neil on üks ja sama lahendihulk. Võrratuse (võrratusesüsteemi) lahendamisel asendatakse antud võrratus (võrratusesüsteem) samaväärse lihtsama võrratuse (näide 1) või võrratusesüsteemiga (näide 2), kuni saame võrratuse, mille lahendihulk on tuntud.

Enamasti kasutatakse *järgmisi teisendusi*: 1) võrratuse liikmete kandmine võrratuse ühelt poolelt teisele; 2) võrratuse mõlema poole korrutamine (jagamine) ühe ja sama nullist erineva arvuga. Seejuures teiseneb võrratus esialgsega samaväärseks võrratuseks ning kehtivad **reeglid.**

1. Liikme kandmisel võrratuse ühelt poolelt teisele tuleb muuta selle liikme märk vastupidiseks.
2. Võrratuse korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama nullist erineva positiivse arvuga jääb võrratuse märk endiseks, negatiivse arvuga korrutamisel (jagamisel) muutub võrratuse märk vastupidiseks.

Näide 1. $(x+2)(x-2)<x^2-2x \Leftrightarrow -4<-2x \Leftrightarrow x<2$.

Sageli kasutatakse võrratuste lahendamisel ka järgmisi samaväärsusi.

$$1)\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Leftrightarrow P(x)Q(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)>0 \\ Q(x)>0 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} P(x)<0 \\ Q(x)<0 \end{cases};$$

$$2)\ \frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Leftrightarrow P(x)Q(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)>0 \\ Q(x)<0 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} P(x)<0 \\ Q(x)>0 \end{cases}.$$

Näide 2. Lahendada võrratus $x(x-1)>0$.

Antud võrratus on samaväärne kahe võrratusesüsteemiga:

$$\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} x<0 \\ x-1<0. \end{cases}$$

Esimesest süsteemist saame, et $x>0$ ja $x>1$. Et viimane nõue on rangem, siis seos $x>1$ määrabki esimese süsteemi lahendihulga.

Teisest süsteemist $x<0$ ja $x<1$. Siin on rangemaks tingimuseks $x<0$, mis määrabki vastava süsteemi lahendihulga.

Antud võrratuse lahendihulgaks on nende kahe süsteemi lahendihulkade ühend $X=\{x \mid x>1 \vee x<0\}$.

Märkus. Võrratuse pooli ei tohi lahendamisel korrutada ega jagada muutujat sisaldava avaldisega, sest nii võime saada esialgse võrratusega mittesamaväärse võrratuse (avaldis võib võrduda nulliga või pole teada selle märk).

Näide 3. Võrratuse $(x+1)x<x+1$ jagamisel avaldisega $x+1$ saaksime kas võrratuse $x<1$ (kui $x+1>0$) või $x>1$ (kui $x+1<0$). Kumbki neist võrratustest pole aga samaväärne esialgsega, mida on lihtne kontrollida, võttes ühel juhul $x=-2$ ja teisel juhul $x=2$.

Näide 4. Kui korrutada võrratust $\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$ muutujaga x, siis saame $x+1<1$ ehk $x<0$. Viimane pole aga samaväärne esialgse võrratusega $\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$, sest selle lahendiks on tühi hulk. See selgub kohe, kui kirjutada võrratuse vasak pool kujul $\frac{1}{x}+1$.

7.2. ÜHE MUUTUJAGA VÕRRATUSED JA VÕRRATUSESÜSTEEMID

7.2.1. Lineaarvõrratused. *Esimese astme võrratuseks* ehk *lineaarvõrratuseks* nimetatakse võrratust, mille mõlemal poolel on kas lineaaravaldis muutuja suhtes või ühel poolel on konstant.

Näiteid. $2x-3<5x+4$; $0 \leqslant 3x-1$; $x-1>0$.

Iga lineaarvõrratus on esitatav kujul

$$ax<b \quad \text{või} \quad ax>b.$$

Nende võrratuste lahendihulgad on määratud järgmiste seostega:

$$x<\frac{b}{a} \text{ või } x>\frac{b}{a}, \text{ kui } a>0,$$

ja

$$x>\frac{b}{a} \text{ või } x<\frac{b}{a}, \text{ kui } a<0.$$

Märkus. Kui lähtevõrratus on mitterange, siis esitub ka lahendihulk mitterange võrratusena.

Näide 1. $3(4x-1)+2<4x+1 \Rightarrow 8x<2 \Rightarrow x<\frac{1}{4}$.

Näide 2. $2(x+1)+5>2x-3 \Rightarrow 7>-3$. Võrratus on tõene muutuja x iga väärtuse korral, lahendihulgaks on hulk **R**.

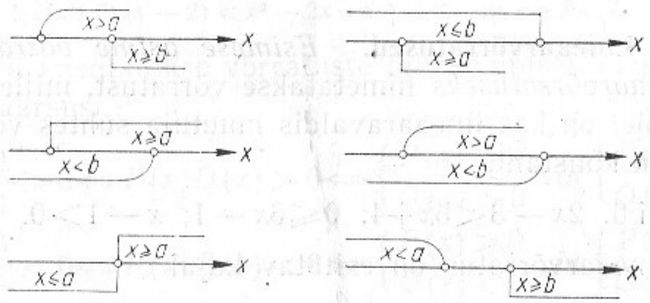
Näide 3. $6(3x-4) \geqslant 3(4x+8)+6x \Rightarrow -24 \geqslant 24$. Saime väära võrratuse, mis ütleb, et antud võrratuse lahendihulk on tühi.

Näide 4. Lahendada võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 4x-5 \leqslant 3x-2 \\ 6x+9>2x+1. \end{cases}$$

Esimesest võrratusest saame, et $x \leqslant 3$. Teisest võrratusest leiame, et $4x>-8$ ehk $x>-2$. Võrratusesüsteemi lahendihulgaks on võrratustega $x \leqslant 3$ ja $x>-2$ määratud hulkade ühisosa, s. t. poollõik $]-2; 3]$.

Suvalise kahest lineaarvõrratusest koosneva süsteemi lahendihulgaks võib olla kas poolsirge, lõik, poollõik, vahemik, üksik punkt või tühi hulk (joon. 7.1).



Joon. 7.1

7.2.2. Ruutvõrratused. *Ruutvõrratuseks* ehk **teise astme võrratuseks** nimetatakse võrratust, mille vähemalt ühel poolel on ruutpolünoom ning mille teisel poolel on kas ruutpolünoom, lineaaravaldis või konstant.

Näiteid. Ruutvõrratused on $5x^2-2x+3<(x+2)^2$ ja $x^2 \geqslant 6x-7$.

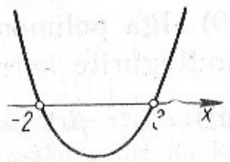
Märgi $>$ korral kõneleme rangest võrratusest. Igale rangele ruutvõrratusele saab anda ühe kujudest

$$ax^2+bx+c>0$$

või

$$ax^2+bx+c<0.$$

Nende võrratuste lahendihulgad leitakse funktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafiku abil. Esimesel võrratusel on selleks muutuja x nende väärtuste hulk, mille korral vastav graafik on ülalpool x-telge, teisel võrratusel allpool x-telge. Arutelu lihtsustamise huvides on alati kasulik võrratust teisendada nii (vajadusel teguriga -1 korrutades), et pealiikme kordaja $a>0$. Sel juhul avaneb funktsiooni graafikuks olev parabool alati ülespoole, mistõttu on vaja leida vaid ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid ning läbi nende skitseerida graafik. Kui neid lahendeid pole, siis on võrratuse $ax^2+bx+c>0$ lahendihulgaks hulk R ja võrratusel $ax^2+bx+c<0$ tühi hulk $\varnothing$.



Joon. 7.2

Näide. Lahendada võrratus $x^2-x-6>0$.

Leiame võrrandi $x^2-x-6=0$ lahendid $x_1=-2$ ja $x_2=3$. Kanname need lahendid x-teljele (joon. 7.2) ning tõmbame läbi punktide -2 ja 3 parabooli, mis avaneb ülespoole (joon. 7.2). Antud võrratuse lahendihulk on $X=]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$.

Märkus. Mitterange võrratuse (näiteks $2x^2-3x-4 \leqslant 0$) lahendihulga saame, kui vastava range võrratuse lahendihulgale lisame ruutvõrrandi lahendid.

Ülevaate ruutvõrratuse lahendihulkadest esitab kokkuvõtlikult järgmine tabel.

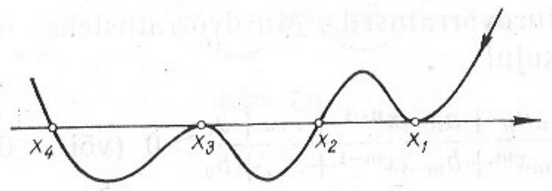
Ruutvõrratus	Pea-liikme kordaja	Ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid		
		$x_1<x_2$	$x_1=x_2=x^*$	puu-duvad
$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x<x^* \vee x>x^*$	R
	$a<0$	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$a<0$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x<x^* \vee x>x^*$	R

7.2.3. Kõrgema astme võrratused. Olgu $P_n(x)$ polünoom (art. 5.5.7.), mille pealiikme kordaja on positiivne. Kõrgema astme võrratuseks nimetatakse võrratust $P_n(x)>0 (<0,\ \geqslant 0,$ või $\leqslant 0)$. Iga polünoom lahutub pealiikme kordaja, lineaar- ja ruuttegurite korrutiseks:

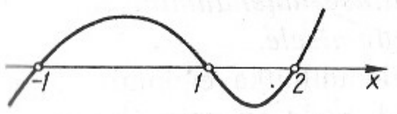
$$P_n(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\beta_1)^k(x-\beta_2)^l\ldots(x^2+px+q),$$

kus ruuttegurid x^2+px+q ei võrdu nulliga ühegi x väärtuse korral.

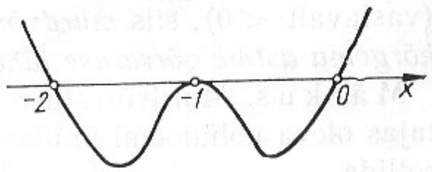
Arvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ on vastava polünoomi nullkohad. Naturaalarv k on nullkoha β_1 järk, l on nullkoha β_2 järk. Kandes need nullkohad arvsirgele (x-teljele), tõmbame läbi nende punktide joone, alustades paremalt ülalt ($a>0$). Seejuures mingit nullkohta läbime lõigates x-telge, kui selle nullkoha järk on paaritu arv, ning puutudes, kui nullkoha järk on paarisarv. Joonisel 7.3 on esitatud näide, kus nullkohtade x_1 ja x_3 järgud on paarisarvud, nullkohtadel x_2 ja x_4 aga paaritud. Niiviisi saadud kõverat vaatleme funktsiooni $y=P_n(x)$ graafiku skitsina, sellelt saame määrata võrratuse lahendihulga.



Joon. 7.3



Joon. 7.4



Joon. 7.5

Näide 1. Lahendada võrratus $x^5-x^3-8x^2+8\leqslant 0$.

Võrratuse vasak pool lahutub tegureiks (art. 5.5.7.):

$$(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)(x+1)\leqslant 0.$$

Kanname võrratuse vasaku poole nullkohad 2, 1 ja -1 x-teljele ja tõmbame vastava joone (joon. 7.4). Meie võrratuse lahendeiks on muutuja x need väärtused, mille korral joon pole ülalpool x-telge. Lahendihulk on $X=]-\infty;\ -1]\cup[1;\ 2]$.

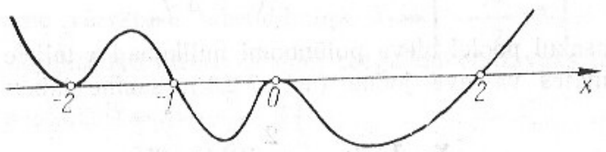
Näide 2. Lahendada võrratus $x^3(x+1)^4(x^2+7)(x+2)>0$.

Kanname võrratuse vasaku poole nullkohad 0, -1 ja 2 x-teljele (joon. 7.5) ja tõmbame vastava joone. Võrratuse lahenditeks on need punktid, kus joon on ülalpool x-telge. Lahendihulk $X=]-\infty;\ -2[\cup]0;\ \infty[$.

Näide 3. Lahendada võrratus $x^6(x+1)^3(x-2)(x+2)\geqslant 0$.

Kanname nullkohad 0, -1, 2 ja -2 x-teljele ja tõmbame vastava joone (joon. 7.6). Saadud jooniselt leiame (joon ei ole neis punktides allpool x-telge) lahendihulga

$$X=]-\infty;\ -1]\cup\{0\}\cup[2;\ \infty[.$$



Joon. 7.6

7.2.4. Murdvõrratused. Murdvõrratusteks nimetatakse võrratusi kujul

$$\frac{a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} > 0 \quad (\text{või } < 0).$$

Et selline võrratus on samaväärne võrratusega $(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0) > 0$ (vastavalt < 0), siis *murdvõrratuse lahendamine taandub kõrgema astme võrratuse lahendamisele.*

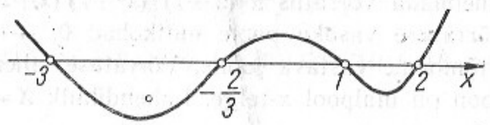
Märkus. Murdvõrratuse lahendihulka ei kuulu nimetajas oleva polünoomi nullkohad. Seda on vaja alati kontrollida.

Näide 1. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2+x-6}{2+x-3x^2} > 0.$$

Võrratus on samaväärne võrratusega $(x^2+x-6)(2+x-3x^2) > 0$, millest arvuga -1 korrutamise järel saame võrratuse

$$(x^2+x-6)(3x^2-x-2) < 0.$$



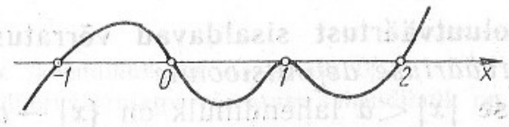
Joon. 7.7

Lahutame need ruutpolünoomid tegureiks:

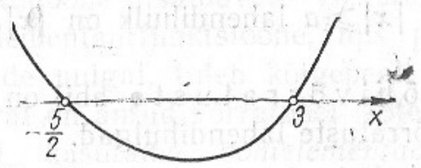
$$(x+3)(x-2)3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right) < 0.$$

Kandes vasakul poolel oleva polünoomi nullkohad x-teljele (joon. 7.7) ning tõmmates vastava joone (art. 7.2.3.), saame lahendihulga

$$X =]-3;\ -\frac{2}{3}[\cup]1;\ 2[.$$



Joon. 7.8



Joon. 7.9

Näide 2. Lahendada võrratus

$$\frac{x^3(x+1)(x-1)^2}{(x-2)^5} < 0.$$

Asendame jagatise korrutisega:

$$x^3(x+1)(x-1)^2(x-2)^5 < 0.$$

Kanname viimase võrratuse vasaku poole nullkohad 0, -1, 1 ja 2 x-teljele (joon. 7.8) ning tõmbame vastava joone. Jooniselt leiame lahendihulga $X =]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ 2[$.

Näide 3. Leida funktsiooni $y = \sqrt{\frac{2x+5}{3-x}}$ määramispiirkond.

Et ruutjuur eksisteerib vaid mittenegatiivsest arvust, siis määramispiirkonnaks on võrratuse $\frac{2x+5}{3-x} \geqslant 0$ lahendihulk. Selle murdvõrratuse asendame võrratusega $(2x+5)(3-x) \geqslant 0$ ehk $(2x+5)(x-3) \leqslant 0$. Kanname nullkohad $-\frac{5}{2}$ ja 3 x-teljele ja tõmbame joone (joon. 7.9). Jooniselt leiame võrratuse lahendihulga $X_1 = \left[-\frac{5}{2};\ 3\right]$. Nimetaja nullkoht 3 pole murdvõrratuse lahend, seega on otsitavaks määramispiirkonnaks poollõik $X = \left[-\frac{5}{2};\ 3\right[$.

7.2.5. Absoluutväärtust sisaldavad võrratused. *Vastavalt absoluutväärtuse definitsioonile*

1) võrratuse $|x|<a$ lahendihulk on $\{x|-a<x<a\}$;
2) võrratuse $|x|\leqslant a$ lahendihulk on $\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$;
3) võrratuse $|x|>a$ lahendihulk on $\{x|x<-a \vee x>a\}$;
4) võrratuse $|x|\geqslant a$ lahendihulk on $\{x|x\leqslant -a \vee x\geqslant a\}$.

Nende nn. p õ h i v õ r r a t u s t e abil on võimalik leida keerukamate võrratuste lahendihulgad.

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y=\arcsin(4x-3)$ määramispiirkond.

Et funktsioon $y=\arcsin x$ on määratud vaid $|x|\leqslant 1$ korral, siis antud funktsiooni määramispiirkonna saame leida võrratusest

$$|4x-3|\leqslant 1.$$

Teise põhivõrratuse kohaselt saame, et

$$-1\leqslant 4x-3\leqslant 1.$$

Liites selles võrratuste ahelas igale lülile arvu 3, saame võrratuste ahela

$$2\leqslant 4x\leqslant 4.$$

Jagades iga lüli arvuga 4, saamegi antud funktsiooni määramispiirkonda fikseeriva tingimuse

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

Otsitav määramispiirkond on lõik $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$.

N ä i d e 2. Lahendada võrratus $\left|\frac{4-3x}{x+2}\right|>2$.

Kolmanda põhivõrratuse kohaselt on antud võrratuse lahendihulgaks võrratuste

$$\frac{4-3x}{x+2}<-2 \quad \text{ja} \quad \frac{4-3x}{x+2}>2$$

lahendihulkade ühend. Lahendame need võrratused eraldi.

1) $\frac{4-3x}{x+2}<-2 \Rightarrow \frac{4-3x}{x+2}+2<0 \Rightarrow \frac{8-x}{x+2}<0 \Rightarrow (8-x)(x+2)<0$
$\Rightarrow (x-8)(x+2)>0.$

Viimase võrratuse lahendihulk on $X_1=]-\infty;\ -2[\cup]8;\ \infty[$.

2) $\frac{4-3x}{x+2}>2 \Rightarrow \frac{-5x}{x+2}>0 \Rightarrow -5x(x+2)>0 \Rightarrow x(x+2)<0.$

Selle võrratuse lahendihulk on $X_2=]-2;\ 0[$.

Antud absoluutväärtusega võrratuse lahendihulk on

$$X=X_1\cup X_2=]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ 0[\cup]8;\ \infty[.$$

7.2.6. Näiteid muud tüüpi võrratustest. Vaatleme mõningaid muid funktsioone sisaldavaid võrratusi. Kui võrratus sisaldab elementaarfunktsioone, mis pole määratud kogu reaalarvude hulgal, tuleb kõigepealt selgitada see hulk, mille korral on antud võrratusel mõte.

Lahendamisel kasutame *põhielementaarfunktsioonide* omadusi (eeskätt *monotoonsust*).

N ä i d e 1. Lahendada juurvõrratus

$$\sqrt{x^2-12x+27}>x+3.$$

Võrratusel on mõte siis, kui $x^2-12x+27=(x-3)(x-9)\geqslant 0$, s. t. kui $x\in]-\infty;\ 3]$ või $x\in[9;\ \infty[$.

Antud võrratus on tõene, kui võrratuse parem pool ei ole positiivne, s. t. $x\leqslant -3$. Et muutuja x nende väärtuste korral on võrratusel mõte, siis ühe osa lahendist moodustavad hulga $X_1=]-\infty;\ -3]$ punktid.

Kui nüüd $x+3>0$, siis $x+3=\sqrt{(x+3)^2}$ ning me saame antud võrratuse esitada kujul

$$\sqrt{x^2-12x+27}>\sqrt{(x+3)^2}.$$

Juurfunktsioon on rangelt kasvav, seetõttu on viimane võrratus samaväärne võrratusega

$$x^2-12x+27>(x+3)^2,$$

millest $-18x>-18$ ehk $x<1$. Saime hulga $X_2=]-\infty;\ 1[$, mille punktides on võrratusel mõte. Et $X_1\subset X_2$, siis antud võrratuse lahendihulk on $X_2=]-\infty;\ 1[$.

N ä i d e 2. Lahendada logaritmvõrratus

$$\log(2x+6)-\log(15-x)>1.$$

Võrratuses esinevad logaritmid on määratud, kui $2x+6>0$ ja $15-x>0$, mistõttu võrratusel on mõte vaid $x\in]-3;\ 15[$ korral.

Pidades silmas seost $1=\log 10$, saame antud võrratuse esitada kujul

$$\log\frac{2x+6}{15-x}>\log 10.$$

Et logaritmfunktsioon alusel 10 on rangelt kasvav, siis

$$\frac{2x+6}{15-x}>10,$$

millest $(x-12)(x-15)<0$. Selle **võrratuse lahendihulk** on vahemik $]12;\ 15[$. Kõigis selle vahemiku punktides on antud võrratusel mõte, seega on vahemik $]12;\ 15[$ ka antud võrratuse lahendihulgaks.

Näide 2. Lahendada võrratus $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$.

Võrratusel on mõte iga x väärtuse korral.

Funktsioon $u=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ on rangelt kahanev funktsioon (s. t. arvu $\frac{1}{2}$ aste on seda väiksem, mida suurem on astendaja). Siit saame, et antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$x^2<2x+3$$

ehk

$$(x-3)(x+1)<0,$$

mille lahendihulk $X=]-1;\ 3[$ on antud eksponentvõrratuse lahendihulgaks.

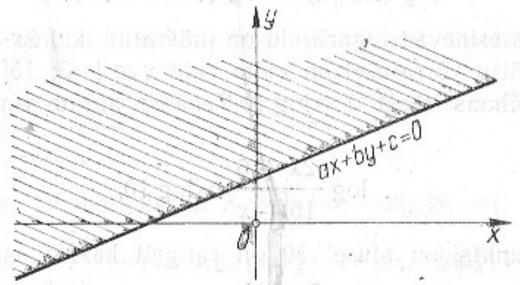
7.3. KAHE MUUTUJAGA VÕRRATUSED JA VÕRRATUSESÜSTEEMID

7.3.1. Kahe muutujaga lineaarvõrratus. Kahe muutujaga lineaarvõrratuseks nimetatakse võrratust

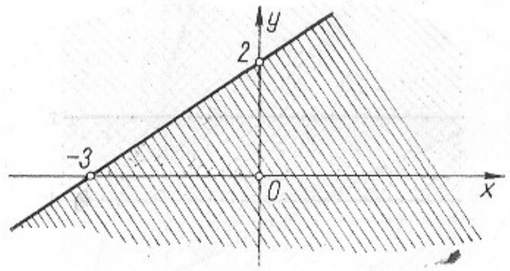
$$ax+by+c\geqslant 0 \quad (\text{või } \leqslant 0),$$

kus a, b ja c on reaalarvud.

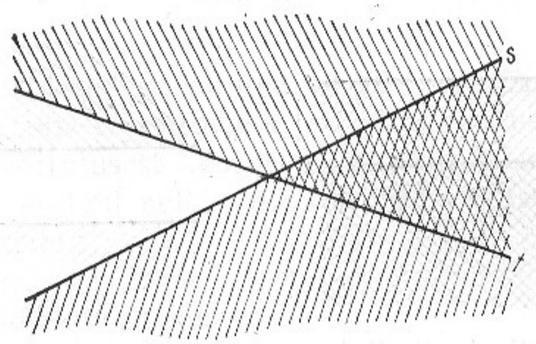
1. Võrratuse $ax+by+c\geqslant 0$ (või $ax+by+c\leqslant 0$) *lahendihulgaks on üks pooltasand koos rajasirge* $ax+by+c=0$ *punktidega* (joon. 7.10).



Joon. 7.10



Joon. 7.11



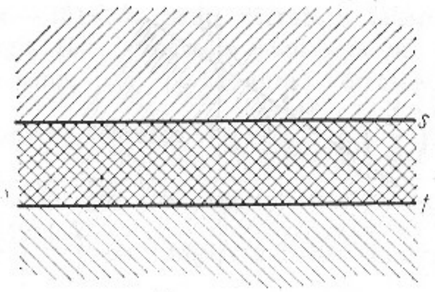
Joon. 7.12

Näide. Lahendada võrratus $2x-3y+6\geqslant 0$.

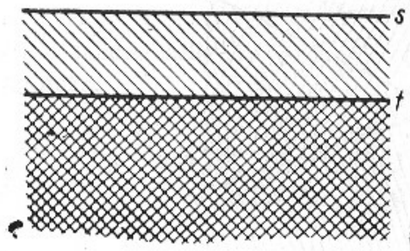
Konstrueerime rajasirge $2x-3y+6=0$ (joon. 7.11). Et kindlaks teha, milline pooltasanditest on antud võrratuse lahendihulgaks, kasutame suvalist punkti, mis ei kuulu rajasirgele. Võtame selleks nullpunkti, mis antud juhul on võrratuse lahend. Seega on lahendihulgaks alumine pooltasand (koos rajasirgega $2x-3y+6=0$).

2. Võrratuse $ax+by+c>0$ (või $ax+by+c<0$) *lahendihulgaks on pooltasand ilma rajasirge* $ax+by+c=0$ *punktideta.*

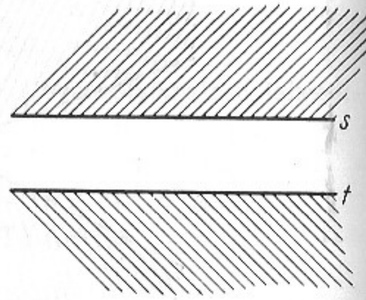
7.3.2. Kahe muutujaga lineaarvõrratusesüsteemid. Kahest võrratusest koosneva süsteemi lahendihulgaks võib olla nurk (joon. 7.12), riba (joon. 7.13), pooltasand (joon. 7.14) või tühi hulk (joon. 7.15). Viimasel juhul öeldakse, et võrratused on vastuolulised. Vastavad eri-



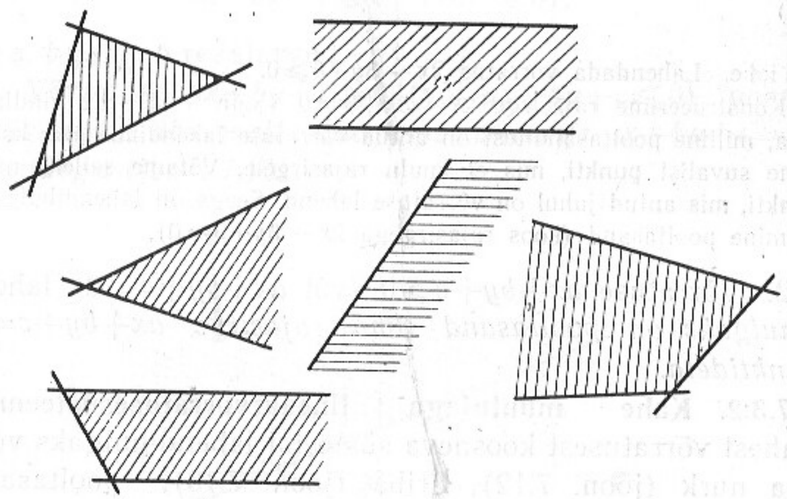
Joon. 7.13



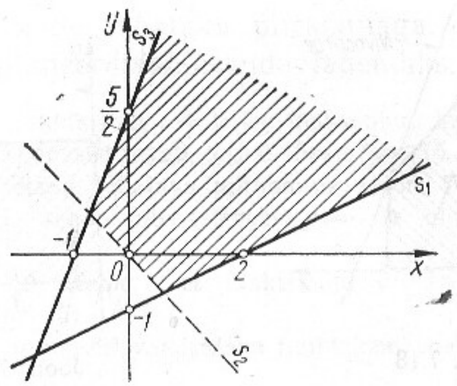
Joon. 7.14



Joon. 7.15



Joon 7.16



Joon. 7.17

juhud sõltuvad sellest, milline on süsteemi üksikute võrratuste lahendite rajasirgete s ja t omavaheline asend.

Kolmest võrratusest koosneva süsteemi lahendihulgaks (kui see ei ole tühi hulk) võib olla üks joonisel 7.16 esitatud kujunditest.

O m a d u s. Iga kahe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemi lahendihulk on kumer.

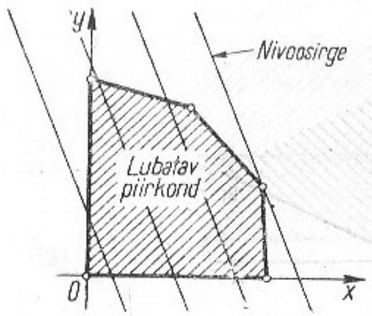
Kumera hulgana mõistame punktihulka, mille mistahes kahte punkti saab ühendada sirglõiguga, mis tervenisti kuulub vaadeldavasse hulka.

N ä i d e. Lahendada võrratusesüsteem

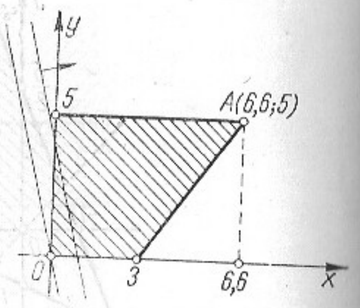
$$\begin{cases} x-2y-2\leqslant 0 \\ x+y>0 \\ 5x-2y+5\geqslant 0. \end{cases}$$

Joonestame sirged $x-2y-2=0$ (joon. 7.17, sirge s_1), $x+y=0$ (s_2) ja $5x-2y+5=0$ (s_3). Esimese ja kolmanda võrratuse jaoks määrame vastava pooltasandi nullpunkti abil (punkt (0; 0) rahuldab neid). Teise võrratuse korral kasutame punkti (1; 1), mis rahuldab seda võrratust. Lahendihulgaks saame joonisel 7.17 viirutatud hulga. Selle kujundi rajajoone punktidest need, mis kuuluvad sirgetele s_1 ja s_3, on lahendihulga punktid, sirge s_2 omad aga mitte.

7.3.3. **Lineaarne planeerimisülesanne:** leida lineaarfunktsiooni $u=ax+by$ korral punkt $(x_0; y_0)$, kus antud funktsioonil on suurim ehk **maksimaalne** (mõnikord vähim



Joon. 7.18



Joon. 7.19

ehk **minimaalne) väärtus**, kusjuures muutujad x ja y peavad rahuldama teatavat lineaarvõrratustest või -võrranditest koosnevat süsteemi (**kitsenduste süsteemi**).

Igat punkti $(x; y)$, mis rahuldab kitsenduste süsteemi, nimetatakse **lubatavaks lahendiks** (plaaniks). Lubatavate lahendite hulka nimetatakse **lubatavaks piirkonnaks.** Kui ülesande sisu kohaselt võivad muutujatel x ja y olla vaid täisarvulised väärtused, siis nimetatakse vastavat ülesannet **täisarvulise planeerimise ülesandeks.** Sel juhul on lubatavateks lahenditeks vaid täisarvuliste koordinaatidega punktid $(x; y)$, mis rahuldavad kitsenduste süsteemi.

Funktsiooni $u=ax+by$ nimetatakse planeerimisülesande **sihifunktsiooniks.** Sirgeid $ax+by=c$ nimetatakse sihifunktsiooni **nivoosirgeteks.** Viimased on omavahel paralleelsed (joon. 7.18).

Planeerimisülesande ***graafiline lahendamine*** toimub järgmiste etappidena.

1. Leitakse lubatav piirkond (kitsenduste süsteemi lahendihulk).

2. Määratakse nivoosirgete liikumise suund vastavalt c kasvamisele. Selleks leitakse kaks erinevat nivoosirget vastavalt väärtustele $c_1<c_2$. Nivoosirge liikumise suund, mis vastab c kasvamisele, märgitakse noolega.

3. Sihifunktsiooni maksimumi (miinimumi) leidmiseks tehakse nivoosirge paralleellüke c kasvamise (kahanemise) suunas selle äärmise asendini, kus nivoosirgel on

veel ühiseid punkte lubatava piirkonnaga. Need ühised punktid ongi planeerimisülesande lahendiks.

Näide 1. Leida funktsiooni $u=3x+y$ maksimum, kusjuures peavad olema täidetud tingimused $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $5x-3y\leqslant 15$, $y\leqslant 5$.

Lahendus. 1. Leiame lubatava piirkonnna (joon. 7.19).

2. Võttes $c=0$, saame nivoosirgeks $y=-3x$ ning $c=3$ korral sirge $y=-3x+3$.

3. Jooniselt 7.19 näeme, et funktsiooni $u=3x+y$ maksimumi saame punktis $A(6{,}6;\ 5)$.

Seega antud tingimustel vaadeldava funktsiooni maksimaalne väärtus

$$u_{max}=3\cdot 6{,}6+5=24{,}8.$$

8. KOMBINATOORIKA JA TÕENÄOSUSTEOORIA

8.1. KOMBINATOORIKA

8.1.1. Kombinatoorika on matemaatika haru, mis käsitleb antud elementidest erinevate tingimuste kohaselt hulkade moodustamist, nende võrdlemist ning teatud tingimusi täitvate erinevate hulkade (ühendite) arvu (või ka erinevate võimaluste arvu) kindlakstegemist. Näiteks: 1) mitu erinevat kolmekohalist osahulka saab moodustada hulga $\{a, b, c, d, e, f\}$ elementidest; 2) loetleda kahekohalised arvud, mida saab moodustada numbritest 1, 2, 7, 8.

Kombinatoorika esimesed mõisted ja valemid tuletasid XVII sajandil prantsuse matemaatikud P. Fermat (1601—1665) ja B. Pascal (1623—1662) ning madalmaade matemaatik Chr. Huygens (1629—1695).

Kombinatoorikas vaadeldavad ühendid (variatsioonid, permutatsioonid, kombinatsioonid — art. 8.1.3.—8.1.5.) liigitatakse *kordumisteta* ja *kordumistega ühenditeks*. Esimesel juhul võib antud hulga element esineda konkreetses ühendis vaid üks kord, teisel juhul ka mitu korda. Näiteks võib iga number (0, 1, 2, ..., 9) esineda kordumisteta kolmekohalistes arvudes vaid üks kord (129, 318, 908 jne.), kordumistega kolmekohalistes arvudes aga ka 2 või koguni 3 korda (229, 414, 333, 900 jne.). Järgnevas vaatleme vaid kordumisteta ühendeid.

8.1.2. Faktoriaal. Naturaalarvude korrutist $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ nimetatakse **arvu *n* faktoriaaliks** ja tähistatakse sümboliga $n!$ Seega

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

Näiteks $3!=3\cdot2\cdot1=6$, $11!=11\cdot10\cdot9\cdot\ldots\cdot2\cdot1=39916800$.

Eraldi defineeritakse, et

$$1!=1 \quad \text{ja} \quad 0!=1.$$

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
0	1	4	24	8	40320
1	1	5	120	9	362880
2	2	6	720	10	3628800
3	6	7	5040	11	39916800

8.1.3. Variatsioonid

Def. Kordumisteta variatsioonideks ehk **variatsioonideks** n elemendist m-kaupa nimetatakse n-elemendilise hulga m-elemendilisi järjestatud osahulki.

Märkus. Järjestatud hulga all mõtleme käesolevas peatükis lõplikku hulka, mille elemendid on mingil viisil järjestatud.

Definitsioonist järeldub, et variatsioonid erinevad üksteisest kas elementide või nende järjestuse poolest.

Näide. Variatsioonid 3 elemendist a, b, c kahekaupa ($m=2$) on hulga $\{a, b, c\}$ kaheelemendilised järjestatud osahulgad $(a; b)$, $(b; a)$, $(a; c)$, $(c; a)$, $(b; c)$, $(c; b)$.

Variatsioonide arvu n elemendist m-kaupa tähistatakse sümboliga V_n^m (vahel ka A_n^m),

$$V_n^m=n(n-1)\ldots[n-(m-1)]=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Näiteks $V_3^2=3\cdot2=6$ (vt. eelmist näidet).

8.1.4. Permutatsioonid

Def. Kordumisteta permutatsioonideks ehk **permutatsioonideks** n elemendist nimetatakse n-elemendilise hulga n-elemendilisi järjestatud osahulki.

Järeldusi definitsioonist.

1. Permutatsioonideks n elemendist nimetatakse variatsioone n elemendist n-kaupa.

2. Permutatsioonid erinevad üksteisest vaid elementide järjestuse poolest.

Näide. Numbritest 1, 2, 3 saab moodustada järgmised erinevad kolmekohalised arvud, mis ei sisalda sama numbrit korduvalt: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Permutatsioonide arv n elemendist

$$P_n=V_n^n=n!$$

Näide. Kümme inimest saavad siseneda bussi $P_{10}=10!=3628800$ erinevas järjekorras.

8.1.5. Kombinatsioonid

Def. Kordumîsteta kombinatsioonideks ehk **kombinatsioonideks** n elemendist m-kaupa nimetatakse n-elemendilise hulga m-elemendilisi osahulki.

Definitsioonist järeldub, et kombinatsioonid erinevad üksteisest vähemalt ühe elemendi poolest.

Näide. Elementidest a, b, c, d saab moodustada järgmised kolmeelemendilised kombinatsioonid ($n=4$, $m=3$); abc, abd, acd, bcd.

Kombinatsioonide arvu n elemendist m-kaupa tähistatakse sümboliga C_n^m või $\binom{n}{m}$, viimast loetakse «n üle m-i».

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{V_n^m}{P_m}.$$

Näide. Kaheteistkümnest inimesest saab moodustada 7-liikmelisi brigaade $C_{12}^7=\frac{12!}{7!5!}=792$ erineval viisil.

Valemeid.

1. $C_n^m=C_n^{n-m}$.
2. $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$.
3. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.
4. $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=0$.

Kombinatsioonide arvud esitatakse sageli kolmnurkse tabelina, mida nimetatakse **Pascali kolmnurgaks:**

C_0^0

C_1^0 C_1^1

C_2^0 C_2^1 C_2^2

C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3

. . . . . .

ehk arvudes

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

. . . . . .

Tabeli iga kahe kõrvutioleva elemendi summa võrdub valemi $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$ põhjal tabeli järgmise rea elemendiga, mis asub nimetatud kahe elemendi vahekohal. See omadus võimaldab Pascali kolmnurka jätkata kui tahes kaugele.

8.1.6. Liitmise ja korrutamise reegel. Kombinatoorika ülesandeid saab sageli lahendada variatsioone, permutatsioone ja kombinatsioone tundmata. Sellisel juhul tuleb kasutada kombinatoorika kaht põhireeglit.

Liitmise reegel: kui objekti A_1 saab valida n_1 viisil, objekti A_2 n_2 viisil jne. ning lõpuks objekti A_m n_m viisil, siis kas objekti A_1 või objekti A_2 või jne. objekti A_m kõigi võimalike valikute arv on $n_1+n_2+\ldots+n_m$.

Liitmise reeglit kasutatakse siis, kui valik toimub põhimõttel «kas ... või».

Näide. Kui lapsel tuleb valida üks auto kolmest või üks nuku kahest või üks pall neljast, siis erinevate valikuvõimaluste arv on $3+2+4=9$.

Korrutamise reegel: kui objekti A_1 saab valida n_1 viisil, seejärel objekti A_2 n_2 viisil jne. ning objekti A_m n_m viisil, siis nii objekti A_1 kui ka objekti A_2 jne. kui ka objekti A_m valikuks on $n_1n_2\ldots n_m$ võimalust.

Korrutamise reeglit kasutatakse siis, kui valik toimub põhimõttel «nii ... kui ka ...».

Näide. Erinevaid neljakohalisi arve on $9\cdot10\cdot10\cdot10=9000$, sest esimesele kohale saab erinevaid numbreid valida 9 erineval viisil, igale järgnevale kohale aga 10 erineval viisil.

8.1.7. Newtoni binoomvalem esitab naturaalarvulise astendajaga (n) binoomi $(a+b)^n$ hulkliikmena:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

ehk

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Järeldus.

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Mõned erijuhud.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Binoomkordajateks nimetatakse Newtoni binoomvalemis esinevaid kordajaid C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n.

Newtoni binoomvalemi ja binoomkordajate omadusi.

1. Avaldise $(a+b)^n$ arendi k-s liige on $C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$.
2. Avaldise $(a+b)^n$ arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete kordajad on võrdsed.
3. Binoomkordajad on esitatavad Pascali kolmnurgana.
4. Binoomkordajate summa on 2^n (vt. art. 8.1.5.).

8.2. TÕENÄOSUSTEOORIA

8.2.1. Tõenäosusteooria on matemaatika haru, mis uurib juhuslikke sündmusi ja nähtusi ning nendega seoses ilmnevaid seaduspärasusi. Tõenäosusteoorias seatakse sündmusele vastavusse arv, mis iseloomustab sündmust tema toimumise võimalikkuse seisukohalt.

Ajalooliselt pärinevad esimeste, hasartmängudega seotud tõenäosusteooria ülesannete lahendused juba XV sajandist. XVII sajandil võeti kasutusele tõenäosuse mõiste ning mitmed teised hilisemasse tõenäosusteooriasse kuuluvad mõisted. Nende mõistete loojad olid prantsuse

matemaatikud B. Pascal (1623—1662) ja P. Fermat (1601—1665), kelle koostöö kirja teel sai alguse 1654, a., mil kirglik hasartmängija Chevalier de Mere esitas Pascalile lahendamiseks hasartmängudega seotud ülesande. Esimene tõenäosusteooria-alane raamat ilmus 1657. aastal. Selle autoriks oli hollandlane Chr. Huygens (1629—1695). Tõenäosusteooriat arendas oluliselt šveitsi matemaatik Jakob Bernoulli (1655—1705). Käesoleva sajandi kolmekümnendail aastail esitas nõukogude matemaatik A. Kolmogorov (sünd. 1903) tõenäosusteooria aksiomaatika, mis pani aluse nüüdisaegsele tõenäosusteooriale.

Tõenäosusteooria areng on olnud tihedalt seotud kombinatoorika arenguga.

8.2.2. Sündmus. Tõenäosusteoorias liigitatakse sündmused kindlateks, võimatuteks ja juhuslikeks.

Def. **Kindlaks sündmuseks** nimetatakse sündmust, mis antud tingimustes kindlasti toimub.

Def. **Võimatuks sündmuseks** nimetatakse sündmust, mis antud tingimustes kindlasti ei toimu.

Def. **Juhuslikuks sündmuseks** nimetatakse sündmust, mis antud tingimustes võib toimuda, kuid võib ka mitte toimuda.

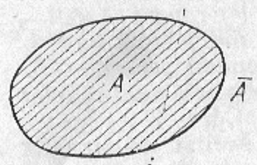
Tingimuste all mõeldakse siin kõiki neid tegureid ja põhjusi, mis mõjustavad sündmuse toimumist või mittetoimumist.

Sümbolid:
kindel sündmus — U või Ω,
võimatu sündmus — V või $\varnothing$,
juhuslik sündmus — $A, B, C, \ldots$ või $A_1, A_2, \ldots$.

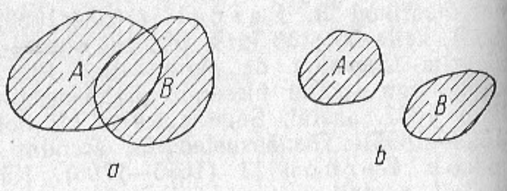
Def. **Sündmuse A vastandsündmuseks** $\bar{A}$ nimetatakse sündmuse A mittetoimumist.

Näide. Olgu sündmus A paarisarvu silmade (2, 4 või 6) tulek täringu viskamisel. Siis sündmuseks $\bar{A}$ on paaritu arvu silmade (1, 3 või 5) tulek täringu viskamisel.

Sündmusi kujutatakse ka geomeetriliselt. Selleks arutletakse järgmiselt: kui laseme tasandile kukkuda väga väikest kuulikest ja see satub tasandi piirkonda A, siis ütleme, et toimus sündmus A, kui kuulike kukub väljapoole piirkonda A, siis sündmus A ei toimunud (toimus sündmus $\bar{A}$). Tähendab, sündmusele A vastab tasandil piirkond A (joon. 8.1). Kindlat sündmust kujutab kogu tasand.



Joon. 8.1



Joon. 8.2

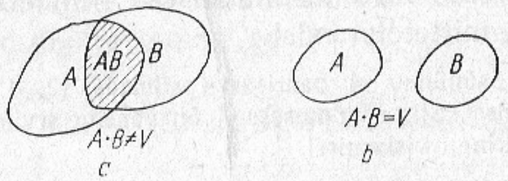
Tehted sündmustega.

Def. **Sündmuste** A ja B **summaks (ühendiks),** mida tähistatakse sümboliga $A+B$ või $A \cup B$, nimetatakse sündmust, mis seisneb kas sündmuse A või sündmuse B (või mõlema) toimumises (joon. 8.2).

Def. **Sündmuste** A ja B **korrutiseks (ühisosaks),** mida tähistatakse sümboliga AB või $A \cdot B$ või $A \cap B$, nimetatakse sündmust, mis seisneb nii sündmuse A kui ka sündmuse B toimumises (joon. 8.3).

Def. **Sündmuste** A ja B **vaheks,** mida tähistatakse sümboliga $A-B$ või $A \setminus B$, nimetatakse sündmust, mis seisneb sündmuse A toimumises, kui sündmus B ei toimu (joon. 8.4).

Näide. Kui sündmus A on paarisarvu silmade (2, 4, 6) tulek ja sündmus B on 3-ga jaguva silmade arvu (3, 6) tulek täringu viskamisel, siis sündmus $A+B$ on 2, 3, 4 või 6 silma tulek, sündmus $A \cdot B$ 6 silma tulek ning sündmus $A-B$ 2 või 4 silma tulek täringu viskamisel.



Joon. 8.3

Joon. 8.4

Omadusi.

1. $A+B=B+A$	5. $A \cdot B=B \cdot A$
2. $A+\bar{A}=U$	6. $A \cdot \bar{A}=V$
3. $A+U=U$	7. $A \cdot U=A$
4. $A+V=A$	8. $A \cdot V=V$

Def. Sündmusi A ja B nimetatakse **välistavateks,** kui $A \cdot B=V$.

Välistavad (joon. 8.2, 8.3, 8.4 juhud *b*) sündmused ei saa toimuda samaaegselt. Näiteks 1 silma tulek (A) ja 6 silma tulek (B) täringu viskel on välistavad sündmused.

Kui $A \cdot B \neq V$, nimetatakse sündmusi mittevälistavateks (joon. 8.2, 8.3, 8.4 juhud *a*).

Näiteks paarisarvu silmade tulek (A) ja 3-ga jaguvate silmade arvu tulek (B) täringu viskamisel on mittevälistavad sündmused.

8.2.3. **Sündmuse** (A) **suhteline sagedus** ehk **relatiivne sagedus,** mida tähistatakse tähega w või sümboliga $w(A)$, on n sõltumatu katse korral sündmuse (A) esinemiste arvu (f) ja katsete koguarvu (n) jagatis:

$$w=\frac{f}{n}.$$

Sageli esitatakse suhteline sagedus protsentides.

Arvu f nimetatakse sündmuse A esinemise **sageduseks** ehk **absoluutseks sageduseks.**

Katseid (ka vaatlust loetakse katseks) nimetatakse sõltumatuteks kui sündmuse A toimumine (või mittetoimumine) ühegi katse korral ei sõltu sellest, kas sündmus A eelmistel katsetel toimus või mitte.

Näide. Kui täringu 100 viske korral tuli 4 silma (A) 17 korda, siis $n=100$, $f=17$ ning $w(A)=0{,}17$.

Suhtelise sageduse omadusi.

1. Iga sündmuse A korral $0 \leqslant w(A) \leqslant 1$.
2. $w(V)=0$.

3. $w(U)=1$.
4. $w(A)+w(\bar{A})=1$.
5. $w(A+B)=w(A)+w(B)$, kui sündmused on välistavad, s. t. kui $AB=V$.
6. $w(A+B)=w(A)+w(B)-w(AB)$, kui $AB\neq V$.

8.2.4. Statistiline tõenäosus. Paljude sündmuste korral jääb nende esinemise suhteline sagedus küllalt püsivaks, kusjuures see püsivus ilmneb seda paremini, mida suurem on katsete (vaatluste) arv n. Arvestades öeldut, defineeritakse sündmuse statistiline tõenäosus.

Def. **Sündmuse statistiliseks tõenäosuseks** nimetatakse sündmuse suhtelist sagedust, kui katsete arv on küllalt suur.

Sündmuse A statistilist tõenäosust t ä h i s t a t a k s e tähega p või sümboliga $P(A)$.

N ä i d e. Kui 1000 nisuterast idanes 890, siis nisuterade idanemise statistiline tõenäosus (öeldakse lihtsalt «idanevus») on 0,89.

Statistilise tõenäosuse korral kehtivad sündmuse suhtelise sageduse o m a d u s e d (art. 8.2.3.), kui neis täht w asendada tähega P (art. 8.2.5.).

8.2.5. Klassikaline tõenäosus. Sündmuse statistilist tõenäosust saab arvutada siis, kui on katsed korraldatud ning tulemused registreeritud. Selleks, et leida sündmuse tõenäosus katseid korraldamata, defineeritakse sündmuse klassikalise tõenäosuse ehk tõenäosuse mõiste.

Def. ***Sündmuse (klassikaliseks) tõenäosuseks*** nimetatakse sündmuse jaoks soodsate võimaluste arvu m ja kõigi võimaluste arvu n jagatist

$$p=\frac{m}{n}.$$

M ä r k u s. Definitsiooni tohib rakendada, kui 1) kõigi võimaluste loetelu on täielik (ükski võimalustest ei ole välja jäänud), 2) kõik võimalused on paarikaupa üksteist välistavad, 3) kõik võimalused on võrdvõimalikud (ükski võimalus ei ole toimumise seisukohalt eelistatud ega ka halvemas olukorras võrreldes teiste võimalustega).

Sündmuse A tõenäosust t ä h i s t a t a k s e tähega p või sümboliga $P(A)$.

N ä i d e. Leiame paarisarvu silmade tuleku tõenäosuse täringu viskamisel. Erinevaid võimalusi on üldse kuus: 1, 2, 3, 4, 5, 6 silma. Kontrollime märgitud tingimuste täidetust: 1) kõik võimalused on loetletud, 2) kaks silmade arvu ei saa tulla täringu viskamisel korraga, 3) eeldades täringu sümmeetrilisust, ei ole põhjust arvata, et mõni silmade arv on paremas või halvemas olukorras kui teised esiletuleku seisukohalt. Seega $n=6$. Soodsaid võimalusi on kolm ($m=3$): 2, 4 või 6 silma. Järelikult $P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5$.

Tõenäosusteooriasse kuuluvate ülesannete lahendamisel ei tehta vahet, kas on leitud sündmuse statistiline või klassikaline tõenäosus (räägitakse lihtsalt sündmuse tõenäosusest), sest mida suurem on katsete arv, seda kindlamalt on loota nimetatud tõenäosuste kokkulangemist.

N ä i d e. Poeglapse sündimise tõenäosus on 0,516. Kui palju poisse on loodetavasti 2000 vastsündinu seas? Vastus: $2000\cdot 0{,}516=1032$.

Sündmuse tõenäosuse o m a d u s i.

1. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.
2. $P(V)=0$.
3. $P(U)=1$.
4. $P(A)+P(\bar{A})=1$.
5. $P(A+B)=P(A)+P(B)$, kui $A\cdot B=V$.
6. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, kui $A\cdot B\neq V$.

N ä i d e. Olgu sündmus A paarisarvu silmade (2, 4, 6) tulek ja sündmus B 3-ga jaguva silmade arvu (3 või 6) tulek täringu viskel. Et $A\cdot B\neq V$ ($A\cdot B$ tähendab 6 silma tulekut), siis $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

Tõenäosusteooria ülesannete lahendamisel kasutatakse sageli kombinatoorikat.

N ä i d e. Urnis on 7 valget ja 3 musta kuuli. Kui suur on tõenäosus, et võttes korraga 5 kuuli, saadakse 3 valget ning 2 musta kuuli?

Lahendus: $p=\frac{C_7^3\cdot C_3^2}{C_{10}^5}=0{,}42$.

8.2.6. Juhuslik muutuja ehk **juhuslik suurus** on niisugune muutuja, mis saab sõltuvalt juhusest erinevaid arvulisi väärtusi. Juhusliku muutuja võimalike väärtuste hulk võib olla lõplik või lõpmatu.

Näiteks silmade arv täringu viskamisel, inimese pikkus, terade arv rukkipeas on juhuslikud muutujad.

Juhuslikke muutujaid tähistatakse tähtedega x, y, z või X, Y, Z.

Juhusliku muutuja mingi väärtuse esiletulekut (mitteesiletulekut) võib vaadelda juhusliku sündmusena. Näiteks 3 silma tulek täringu viskamisel on juhuslik sündmus.

Kui juhusliku muutuja igale väärtusele on vastavusse seatud tema esinemise tõenäosus, siis öeldakse, et on esitatud **juhusliku muutuja jaotus.**

Näiteks järgmine tabel esitab kahe täringu korraga viskamisel tuleva silmade summa x jaotuse.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

9. GEOMEETRIA

9.1. GEOMEETRIA

9.1.1. Geomeetria (kr. *gē* — maa, *metrikē* — mõõt), nagu kogu matemaatika ja ka teised loodusteadused, uurib reaalse maailma objekte. Matemaatika (seega ka geomeetria) erinevus teistest loodusteadustest seisneb aga selles, et ta uurib neid objekte teistest teadustest abstraktsemalt, jättes kõrvale uuritavate objektide konkreetse sisu. Geomeetria võtab reaalsusest vaatluse alla vaid objekti kuju. Seetõttu nimetatakse geomeetriaks matemaatika haru, mis uurib reaalsuse ruumilisi vorme (geomeetrilisi kujundeid) nende omadusi ning vahekordi.

9.1.2. Geomeetriline kujund. Geomeetrilise kujundi all mõeldakse niisugust objekti, millest on mõtteliselt eraldatud kõik omadused peale ruumiliste.

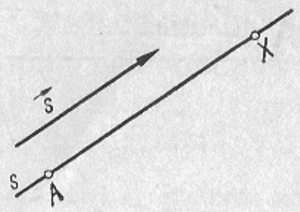
Hulgateooria seisukohalt on geomeetriliseks kujundiks iga punktihulk, sest kõiki objekte saab vaadelda koosnevana punktidest. Punkte tähistatakse suurte tähtedega A, B, C, ...

Geomeetrilised kujundid on näiteks sirge ja tasand.

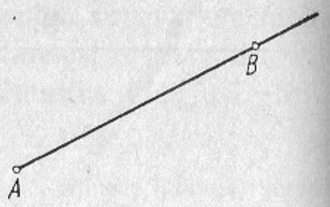
Stereomeetrias vaadeldavat kõigi punktide hulka nimetatakse **ruumiks,** mida tähistatakse tähega P või U. Iga geomeetriline kujund Φ on ruumi pärisosahulk: $\Phi \subset P$.

9.1.3. Sirge ehk **sirgjoone mõiste** võetakse algmõisteks (art. 9.4.4.) või defineeritakse teiste mõistete kaudu. Artiklis 9.4.3. esitatud aksiomaatikas defineeritakse sirge järgmiselt: sirgeks s, mis läbib punkti A vektori $\vec{s}$ sihis, nimetatakse kõigi selliste punktide hulka, mille kohavektor punkti A suhtes kuulub vektori $\vec{s}$ sihti (joon. 9.1):

$$s = \{X \mid \vec{AX} = x\vec{s}\}.$$



Joon. 9.1

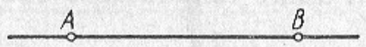


Joon. 9.2

S i r g e i d t ä h i s t a t a k s e tähtedega a, b, c, ... või sümbolitega (AB), (AC), (BC), ... kus A, B, C, ... on vastavalt sirgetel asetsevad punktid. Kui punkt A asetseb sirgel a ehk, teiste sõnadega, sirge a läbib punkti A, siis kirjutatakse $A \in a$.

Sirge iga punkt jaotab sirge ülejäänud punktide hulga kaheks osahulgaks, mida nimetatakse **poolsirgeteks** ehk **lahtisteks poolsirgeteks**. Lahtist poolsirget koos sirget jaotava punktiga nimetatakse **kinniseks poolsirgeks** ehk **kiireks**. Kõnealust punkti nimetatakse **kiire alguspunktiks**. Kiirt AB (A — alguspunkt) t ä h i s t a t a k s e (joon. 9.2) ka sümboliga $[AB)$. Alati $[AB) \subset (AB)$.

Def. **Lõiguks** ehk **sirglõiguks** $[AB]$ nimetatakse kiirte $[AB)$ ja $[BA)$ ühisosa (joon. 9.3).



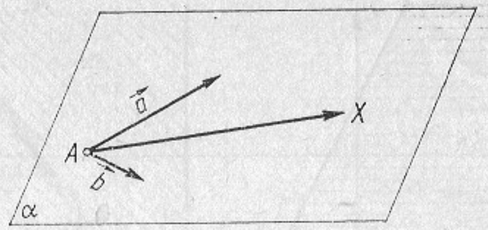
Joon. 9.3

Punkte A ja B nimetatakse **lõigu otspunktideks,** nende vahel asetsevaid punkte aga lõigu sisepunktideks.

Lõiku otspunktidega A ja B t ä h i s t a t a k s e sümboliga $[AB]$ ja selle lõigu pikkust sümboliga $|AB|$. Alati $[AB] \subset (AB)$.

Sageli ei tehta vahet lõigul ja lõigu pikkusel. Siis «lõik AB» ja «lõik a» tähendavad nii geomeetrilist objekti (punktihulka) kui ka lõigu pikkust (mõõtarvu).

9.1.4. Tasandi ehk **tasapinna mõiste** võetakse algmõisteks (art. 9.4.4.) või siis defineeritakse teiste mõistete kaudu. Artiklis 9.4.3. esitatud aksiomaatika korral defi-



Joon. 9.4

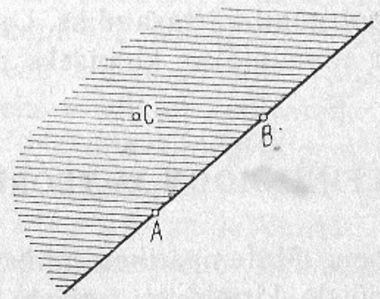
neeritakse tasand järgmiselt: tasandiks α, mis läbib punkti A vektoripaari $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ rihis, nimetatakse kõigi selliste punktide hulka, mille kohavektor punkti A suhtes kuulub vektoripaari $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ rihti (joon. 9.4),

$$\alpha = \{X \mid \overrightarrow{AX} = x\vec{a} + y\vec{b}\}.$$

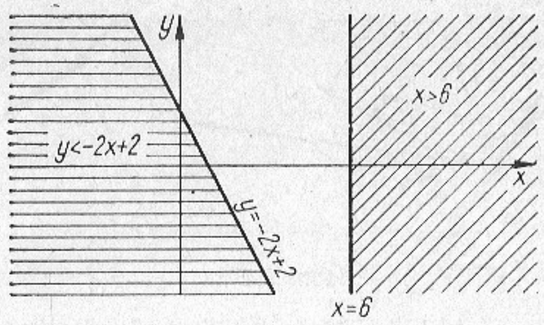
T a s a n d e i d t ä h i s t a t a k s e tähega α, β, γ, ... või sümboliga (ABC), kui tasand on määratud punktidega A, B, C. Kui sirge a asetseb tasandil α, siis kirjutatakse: $a \subset \alpha$.

Tasandi iga sirge jaotab tasandi ülejäänud punktide hulga kaheks osahulgaks, mida nimetatakse **pooltasandeiks** ehk **lahtiseiks pooltasandeiks.** Lahtist pooltasandit koos tasandit jaotava sirgega nimetatakse kinniseks pooltasandiks. Kõnealust sirget nimetatakse **pooltasandi äärsirgeks,** ka **rajasirgeks.**

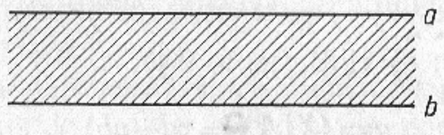
Kinnist pooltasandit t ä h i s t a t a k s e sümboliga $[sC)$ või $[ABC)$, kus sirge s või vastavalt sirge (AB)



Joon. 9.5



Joon. 9.6



Joon. 9.7

on pooltasandi äärsirge ja punkt C määrab kahest pooltasandist ühe (joon. 9.5).

Koordinaattasandi korral saab pooltasandit esitada lineaarvõrratusega (joon. 9.6).

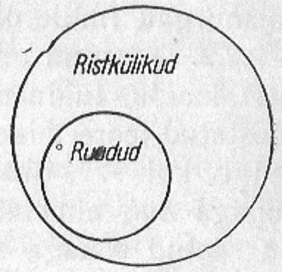
Ribaks nimetatakse kahe paralleelsete äärsirgetega kinnise pooltasandi ühisosa, mis jääb äärsirgete vahele (joon. 9.7). Pooltasandite äärsirgeid nimetatakse **riba äärsirgeteks.**

9.1.5. Poolruum. Iga tasand jaotab ruumi ülejäänud punktide hulga kaheks osahulgaks, mida nimetatakse **poolruumideks** ehk **lahtisteks poolruumideks.** Kõnealust tasandit nimetatakse **poolruumi äärtasandiks.** Lahtist poolruumi koos äärtasandiga nimetatakse **kinniseks poolruumiks.**

9.2. DEFINITSIOON JA TEOREEM

9.2.1. Definitsioon. Matemaatikas nimetatakse definitsiooniks mõiste kirjeldust (mõiste sisu avamist), kui selles sisalduvate andmete põhjal saab iga objekti

Joon. 9.8



Joon. 9.9

kohta otsustada, kas ta kuulub mõistega määratavasse objektide hulka või mitte.

Definitsiooni vorme on mitmesuguseid. Koolimatemaatikas on neist enamkasutatav defineerimine soomõiste ja liigitunnuse abil. Selle definitsiooni korral eraldatakse soomõistega määratud hulgast teatud tunnuse, nn. liigitunnuse abil pärisosahulk, mis kujutab defineeritavat mõistet (joon. 9.8). Soomõisteks on kas algmõiste (art. 9.3.) või juba varem defineeritud mõiste. Niisuguses definitsioonis esineb tavaliselt sõna «nimetatakse».

Näide. Ruuduks nimetatakse ristkülikut, mille kõik küljed on võrdsed. Selle definitsiooniga märgitakse, et ruut kuulub ristkülikute (soomõiste) hulka, kusjuures liigitunnusega (kõik küljed on võrdsed) eraldatakse ristkülikute hulgast ruutude hulk (joon. 9.9).

Algmõisted defineerib aksiomaatilise meetodi (art. 9.3.) korral kaudselt aksioomide süsteem.

Definitsioonis peab olema andmeid piisavalt, et defineeritav mõiste oleks täielikult määratud.

Definitsioonis ei tohi olla midagi liigset. Ülevaatlikuma ja kiirema kujutluse loomiseks jäetakse koolis see nõue sageli täitmata. Näiteks ruudu definitsioonis (vt. eelmist näidet) piisab tingimusest, et ristkülikul on üks paar lähiskülgi võrdsed (mitte aga kõik küljed võrdsed).

Mõistet saab defineerida mitmeti, lähtudes erinevatest

soomõistetest. Sobivalt tuleb siis muuta ka liigitunnust. Näiteks ruutu saab defineerida ristkülikuna, mille kõik küljed on võrdsed, või rombina, mille kõik nurgad on täisnurgad (mille diagonaalid on võrdsed).

9.2.2. Teoreem on lause, mille õigsus tõestatakse arutluse kaudu, tuginedes aksioomidele (art. 9.3.) ja varem tõestatud teoreemidele. Teoreemi saab tavaliselt sõnastada kujul: kui ..., siis .... Teoreemi osa, mis on seotud sõnaga *kui*, nimetatakse teoreemi **eelduseks,** ja osa, mis on seotud sõnaga *siis*, **väiteks.** Tõestada teoreem tähendab näidata, et teoreemi eeldusest p järeldub väide q, s. t. $p \Rightarrow q$.

Kui vahetada teoreemi eeldus ja väide, siis tekib lause, mida nimetatakse **pöördlauseks (pöördteoreemiks).** Sümboleis: $q \Rightarrow p$. Pöördlause on kas tõene või väär.

Kui asendada teoreemi eeldus ja väide nende eitustega (sümbolid $\bar{p}$ ja $\bar{q}$), siis tekib lause, mida nimetatakse teoreemi **vastandlauseks (vastandteoreemiks),** sümboleis: $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$. Vastandlause on kas tõene või väär.

Kui vahetada teoreemi eeldus ja väide ning asendada need eitustega, siis tekib lause, mida nimetatakse teoreemi **pöördvastandlauseks (pöördvastandteoreemiks).** Sümboleis: $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Pöördvastandlause on alati tõene.

Teoreem ning pöördteoreem võetakse tavaliselt kokku üheks lauseks väljenditega «on tarvilik ja piisav» või «siis ja ainult siis» või «parajasti siis» (ka «need ja ainult need», «üks ja ainult üks» jne.).

Näide. Kui arv on paarisarv, siis ta jagub 2-ga. Kui arv jagub 2-ga, siis ta on paarisarv. Kokkuvõetult: arv jagub kahega siis ja ainult siis (või parajasti siis), kui ta on paarisarv. Ehk teisiti: arvu jagumiseks kahega on tarvilik ja piisav, et arv oleks paarisarv.

9.3. AKSIOMAATILINE MEETOD

Aksiomaatilist meetodit kasutatakse juba välja arenenud (matemaatilise) teooria loogiliseks ja rangeks ülesehitamiseks (vaadeldava teooria aksiomatiseerimiseks). Aksiomaatilise meetodi rakendamisel

1) fikseeritakse **algmõisted** — mõisted, mida ei defineerita,

2) fikseeritakse **aksioomid** — laused, mida ei tõestata, kuid loetakse tõesteks,

3) defineeritakse **tuletatud mõisted** kas algmõistete kaudu või selliste mõistete kaudu, mis on juba defineeritud algmõistete abil,

4) sõnastatakse ning tõestatakse **teoreemid;** tõestamisel kasutatakse kas vahetult aksioome või lauseid (teoreeme), mis on juba tõestatud aksioomide abil.

Algmõisteid ja aksioome ei saa fikseerida üksteisest lahus, sest aksioomid peavad edasi andma algmõistete omadusi ning algmõistete vahelisi seoseid. Seda öeldakse lühemalt: aksioomid peavad kaudselt defineerima algmõisted.

Aksiomatiseerivast teooriast endast ei tulene, missugused mõisted tuleb võtta algmõisteteks; nende valimisel esineb teatav vabadus. Samuti on teatav vabadus ka aksioomide fikseerimisel (isegi samade algmõistete korral). Tähendab, sama (matemaatilise) teooria aksiomatiseerimisel võib kasutada erinevaid algmõistete ning aksioomide süsteeme (art. 9.4.2.—9.4.4.). Mõiste, mis ühes aksiomaatilises süsteemis on algmõiste, võib teises aksiomaatilises süsteemis olla tuletatud mõiste ja vastupidi. Samuti võib matemaatiline lause olla ühe aksiomaatika korral aksioom, teise korral aga teoreem ning vastupidi.

Algmõistete ja aksioomide süsteemi ei saa moodustada sellisi täiesti vabalt, täidetud peavad olema järgmised tingimused:

1) aksioomide süsteemis ei tohi olla vasturääkivust (aksioomide seas ei tohi olla kaht teineteist eitavat aksioomi ja aksioomide süsteemist ei tohi järelduda teoreeme, mis eitavad teineteist või mõnd aksioomi);

2) algmõisteid ja aksioome peab olema küllalt palju, nii et nende alusel saab teooria iga ülejäänud mõistet defineerida ja iga ülejäänud väidet tõestada või ümber lükata;

3) algmõisteid ja aksioome ei tohi olla liiga palju (algmõistete seas ei tohi olla mõisteid, mida saab defineerida teiste algmõistete kaudu, ega aksioomide seas lauseid, mida saab tõestada teiste aksioomide abil).

Tänapäevaks on aksiomatiseeritud mitmed matemaatilised teooriad (näiteks geomeetria, aritmeetika, tõenäosusteooria). Universaalset aksiomaatikat kogu matemaatika jaoks ei leidu.

9.4. GEOMEETRIA AKSIOMATISEERIMISEST

9.4.1. Geomeetria aksiomatiseerimine. Esimesena üritas geomeetriat aksiomatiseerida Eukleides (III saj. e.m.a.). XIX sajandil saadi aru, et tema süsteem on puudulik ning asuti seda täiendama. 1899. a. esitas saksa matemaatik D. Hilbert (1862—1943) geomeetria täieliku aksiomaatika. Selles on 6 algmõistet ning 23 aksioomi. Hiljem loodi ka teisi aksiomaatikaid. Näiteks saksa matemaatiku H. Weyli (1885—1955) poolt loodud aksiomaatika.

9.4.2. H. Weyli aksiomaatia tugineb defineerimata mõistetele «vektor» ja «punkt», seosele «arvupaar — vektor» ning tehetele vektoritega: vektorite liitmine, vektori korrutamine arvuga, vektorite skalaarkorrutis.

Aksioomid.

I rühm. Igale kahele vektorile $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ seatakse vastavusse vektor, mida nimetatakse nende summaks ning tähistatakse sümboliga $\vec{a}+\vec{b}$.

1. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
3. Leidub selline vektor $\vec{0}$ (nullvektor), et $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. Iga vektori $\vec{a}$ korral leidub vektor $\vec{b}$ nii, et $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ ($\vec{b}$ on vektori $\vec{a}$ vastandvektor, mida tähistatakse sümboliga $-\vec{a}$).

II rühm. Igale vektorile $\vec{a}$ ja reaalarvule k seatakse vastavusse vektor, mida nimetatakse vektori $\vec{a}$ korrutiseks arvuga k ning tähistatakse sümboliga $k\vec{a}$.

1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.
2. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$, $k,\ l\in\mathbf{R}$.
3. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k,\ l\in\mathbf{R}$.
4. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$, $k\in\mathbf{R}$.

III rühm. Igale kahele vektorile $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ seatakse vastavusse reaalarv, mida nimetatakse nende vektorite skalaarkorrutiseks ja tähistatakse sümboliga $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
3. $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $k\in\mathbf{R}$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, kui $\vec{a}\neq\vec{0}$.

IV rühm.

1. Leidub kolm vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nii, et $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{0}$ vaid siis, kui $k=l=m=0$.
2. Iga nelja vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ korral leiduvad reaalarvud k, l, m, n, mis ei ole korraga nullid, nii et $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}+n\vec{d}=\vec{0}$.

V rühm. On antud mittetühi hulk (ruum), mille elemente nimetatakse punktideks. Igale punktipaarile A ja B vastab vektor, mida tähistatakse sümboliga $\overrightarrow{AB}$.

1. Iga punkti A ja vektori $\vec{a}$ korral leidub punkt B nii, et $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

2. Suvaliste punktide A, B, C korral $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

3. Kui $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, siis punktid A ja B langevad kokku.

9.4.3. H. Weyli aksiomaatika alusel loodud aksiomaatika. Seda aksiomaatikat *käsitletakse koolimatemaatikas.* Algmõisteteks on «punkt» ja «vektor» ning kolm seost, mida kaudselt defineerivad aksioomid.

Olgu P kõigi punktide hulk (ruum) ja V ruumi vektorite hulk. Esimene põhiseos on hulga $P\times P$ kujutus hulgale V ning see defineeritakse kolme aksioomiga.

1. Igale järjestatud punktipaarile $(A; B)$ vastab üks ja ainult üks vektor $\overrightarrow{AB}$.

2. Igale paarile $(A; \vec{v})$ vastab üks ja ainult üks punkt B, nii et $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.

3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ (rööpkülikuaksioom).

Teist põhiseost nimetatakse vektori korrutamiseks arvuga. See seos defineeritakse aksioomidega (4.—8.), kus $p, r\in\mathbf{R}$. Kõnealune põhiseos on hulga $R\times V$ kujutus hulgale V.

4. Igale paarile $(r; \vec{v})$ vastab üks ja ainult üks vektor, mida tähistatakse sümboliga $r\vec{v}$.

5. $p(r\vec{v})=(pr)\vec{v}$ (assotsiatiivsus arvteguri suhtes).

6. $(p+r)\vec{v}=p\vec{v}+r\vec{v}$ (distributiivsus arvude liitmise suhtes).

7. $r(\vec{u}+\vec{v})=r\vec{u}+r\vec{v}$ (distributiivsus vektorite liitmise suhtes).

8. $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$.

Algmõistete ja aksioomide 1—8 abil defineeritakse vektorite summa, kollineaarsus ja komplanaarus ning sirge ja tasand. Ruumi viivad järgmised kaks aksioomi.

9. Leidub kolm mittekomplanaarset vektorit.

10. Igat vektorit saab lineaarselt avaldada kolme mittekomplanaarse vektori kaudu.

Kolmas põhiseos on vektorite skalaarne korrutamine. See on hulga $V\times V$ kujutus hulgale $\mathbf{R}$ ning ta defineeritakse viimase viie aksioomiga. Nimetatud seos võimaldab uurida mõisteid, mis on seotud mõõtmisega.

11. Igale järjestatud vektoripaarile $(\vec{u}; \vec{v})$ vastab üks ja ainult üks arv — skalaarkorrutis $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

12. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (kommutatiivsus).

13. $(r\vec{u})\cdot\vec{v}=r(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (assotsiatiivsus arvuga korrutamise suhtes).

14. $t(\vec{u}+\vec{v})=t\vec{u}+t\vec{v}$ (distributiivsus vektorite liitmise suhtes).

15. $\vec{v}^2\geqslant 0$; $\vec{v}^2=0\Leftrightarrow\vec{v}=\vec{0}$.

9.4.4. A. Kolmogorovi aksiomaatika. Koolimatemaatikas (üleliidulistes õpikutes) kasutatakse järgmist, A. Kolmogorovi poolt loodud aksiomaatikat.

Algmõisted: «punkt», «sirge», «tasand», «kaugus».

Aksioomid.

1. Leidub vähemalt üks sirge ja vähemalt üks tasand. Sirge ja tasand on ruumi erinevad pärisosahulgad.

2. Iga kaht erinevat punkti läbib üks ja ainult üks sirge.

3. Sirge, mis läbib tasandi kaht erinevat punkti, asetseb sellel tasandil.

4. Kolme mitte ühel sirgel asetsevat punkti läbib üks ja ainult üks tasand.

5. Kui kahel erineval tasandil on üks ühine punkt, siis on nende tasandite ühisosaks sirge.

6. Iga kahe punkti A ja B korral leidub mittenegatiivne arv, mida nimetatakse punkti A kauguseks punktist B. Kaugus AB on null siis ja ainult siis, kui punktid A ja B ühtivad.

7. Punkti A kaugus punktist B on võrdne punkti B kaugusega punktist A.

8. Iga kolme punkti A, B, C korral on punktide A ja C vaheline kaugus mitte suurem punktide A ja B ning B ja C kauguste summast: $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

9. Iga tasandi korral kehtivad planimeetrias järjestuse aksioomid, liikumise aksioom ja paralleelide aksioom.

Märkus. **Järjestuse aksioomid. 1.** Sirge p iga punkt O jaotab sirge p ülejäänud punktid kaheks mittetühjaks hulgaks nii, et a) iga kahe punkti A ja B korral, mis kuuluvad erinevatesse hulkadesse, asetseb punkt O punktide A ja B vahel; b) punktide A ja B kuulumisel samasse hulka asetseb üks neist punktidest teise punkti ning punkti O vahel. **2.** Kauguse a korral leidub kiirel alguspunktiga O üks ja ainult üks punkt A nii, et kaugus $|OA| = a$. **3.** Kui punkt C asetseb punktide A ja B vahel, siis punktid A, B ja C asetsevad ühel sirgel. **4.** Tasandi iga sirge p jaotab tasandi ülejäänud punktid kaheks mittetühjaks hulgaks nii, et a) iga kaks erinevatesse hulkadesse kuuluvat punkti on eraldatud sirgega p, b) iga kaks samasse hulka kuuluvat punkti ei ole eraldatud sirgega p.

Liikumise aksioom: kui kaugus $|AB|$ on positiivne ning võrdub kaugusega $|A_1B_1|$, siis leidub kaks ja ainult kaks liikumist, mis teisendavad punkti A punktiks A_1 ning punkti B punktiks B_1.

Paralleelide aksioom: väljaspool sirget asuvat punkti läbib üks ja ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

9.5. GEOMEETRIA AJALOOST

Geomeetria vanima osa, nn. elementaargeomeetria teke on seotud inimeste praktiliste vajadustega, nagu maamõõtmine, pindalade ja ruumalade leidmine. Just niisuguse sisuga ülesandeid esineb Egiptuse ja Babüloonia matemaatilistes tekstides, mis pärinevad juba II aastatuhandest e.m.a. Sajandite jooksul kogutud geomeetriaalased teadmised ei moodustanud aga ühtset ranget teaduslikku süsteemi, see oli vaid teatud võtete ja reeglite kogu, millel oli enam empiiriline kui loogiline iseloom.

VII sajandist e.m.a. kuni V sajandini m.a.j. arendasid geomeetriat põhiliselt kreeklased, kes said osa oma geomeetriaalastest teadmistest Egiptusest. Paljud geomeetriasse kuuluvad mõisted ja faktid, mida käesoleval ajal õpitakse koolimatemaatika raames, pärinevad just kõnealusest perioodist. Nii näiteks tõestas Thales Mileetosest (u. 625—547 e.m.a.) kolmnurkade kongruentsuse ühe tunnuse, et võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed ja et diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk (Thalese teoreem). Pythagoras (u. 580—500 e.m.a.) avastas ühismõõduta lõikude (irratsionaalarvude) olemasolu ning tõestas teoreemi, mida tunti sisuliselt juba II aastatuhandel e.m.a. Babüloonias. Anaxagoras (u. 500—428 e.m.a.) tegeles nn. ringi ruutimise probleemiga ja perspektiivi küsimustega. Hippokratesele Chiosest (V saj. e.m.a.) omistatakse esimene katse esitada geomeetriat süstemaatilise kursusena. Platon (427—347 e.m.a) ja tema õpilane Aristoteles (384—322 e.m.a.) uurisid mõtlemise vorme, töötasid välja formaalse loogika ning esitasid tõestamise teooria, mis tegi võimalikuks geomeetria range süstemaatilise esituse. Peaaegu kogu elementaargeomeetria esimene säilinud aksioomidele tuginev deduktiivne käsitlus pärineb Eukleideselt (III saj. e.m.a.). Selle esitas ta teoses «Elemendid», mis mõjustas matemaatika arengut ligi 2000 järgneva aasta jooksul. Pärast Eukleidest arendasid geomeetriat edasi veel mitmed kreeka matemaatikud. Nii näiteks tegeles koonuslõigete (ringjoon, ellips, parabool, hüperbool) teooriaga Apollonios (u. 260—170 e.m.a.), kujundite pindala ja ruumala arvutamisega Archimedes (u. 287—212 e.m.a.)

Tõsisem pööre geomeetria arengus toimus alles XVII sajandil, mil täiustati geomeetrias kasutatavat uurimismeetodit, loodi koordinaatide meetod. Matemaatika haru, milles geomeetrilisi tõdesid uuritakse algebraliselt, kasutades koordinaatide meetodit, nimetatakse analüütiliseks geomeetriaks. Selle rajajad on prantsuse filosoof ja loodusteadlane R. Descartes (1596—1650) ja (sõltumatult eelmisest) prantsuse matemaatik P. Fermat (1601—1665). Diferentsiaalarvutuse (tekkis samuti XVII sajandil) ja koordinaatide meetodi rakendamisel geomeetrias tekkis diferentsiaalgeomeetria. Selle kui iseseisva teadusharu loojad on prantsuse matemaatik G. Monge (1746—1818) ja saksa matemaatik C. F. Gauss (1777—1855). G. Monge pani aluse ka kujutavale geomeetriale, mis käsitleb ruumiliste kujundite kujutamist tasandil ja ruumigeomeetria ülesannete lahendamist nende kujutiste abil. Perspektiiviga seotud matemaatiliste küsimuste uurimisest arenes projektiivne geomeetria. Selle rajasid prantsuse matemaatikud G. Desargues (1593—1662) ja B. Pascal (1623—1662).

Geomeetria ja kogu matemaatika arengus toimus uus murrang XIX sajandil. Selle põhjustas 1826. a. Kaasani ülikooli professori N. Lobatševski (1792—1856) avastatud geomeetria (vastav töö ilmus 1829. a.), mis erines eukleidilisest geomeetriast vaid ühe aksioomi, nn. paralleelide aksioomi poolest. Seda geomeetriat hakati nimetama Lobatševski geomeetriaks. Nagu selgus, oli sõltumatult N. Lobatševskist jõudnud uue geomeetriani ka ungari matemaatik J. Bolyai (1802—1860), kelle vastavasisuline töö ilmus 1832. a. Lobatševski geomeetria ei kehti tasandil, vaid teatud pinnal. nn. pseudosfääril. Peale Lobatševski geomeetria tekkis ka teisi geomeetriaid ning neid ühendavaid mõisteid ja teooriaid. Elementaargeomeetria täieliku aksiomaatika, mis vastab tänapäeva loogika nõuetele, esitas 1899. a. saksa matemaatik D. Hilbert (1862—1943).

10. PLANIMEETRIA

10.1. PLANIMEETRIA

Geomeetrilist kujundit, mille kõik punktid kuuluvad ühele tasandile, nimetatakse **tasandiliseks kujundiks.**

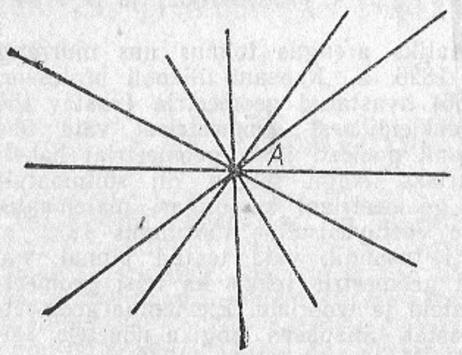
Geomeetria osa, mis käsitleb tasandilisi kujundeid, nendé omadusi ja vahekordi, arvestamata ümbritseva ruumi olemasolu, nimetatakse **planimeetriaks** (lad. *planum* — tasand, kr. *metreō* — mõõdan) ehk **tasandigeomeetriaks.**

10.2. PUNKT JA SIRGE TASANDIL

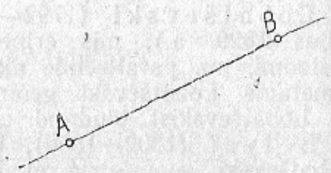
Läbi ühe punkti saab tasandil joonestada lõpmata palju sirgeid. Tasandi kõigi sirgete hulka, mis läbivad ühte punkti, nimetatakse **lõikuvate sirgete kimbuks** ja punkti **kimbu keskpunktiks** (joon. 10.1).

Tasandi kõigi kiirte hulka, mille alguspunktid ühtivad, nimetatakse **kiirte kimbuks.**

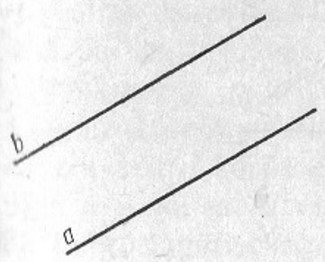
Läbi kahe punkti saab tasandil panna vaid ühe sirge (joon. 10.2).



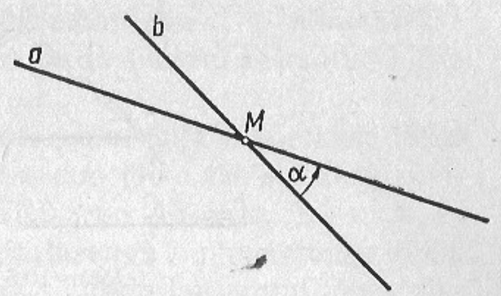
Joon. 10.1



Joon. 10.2



Joon. 10.3



Joon. 10.4

J ä r e l i k u l t:

1) kui kahel sirgel on kaks ühist punkti, siis need sirged ühtivad;

2) kaks sirget saavad lõikuda vaid ühes punktis.

Lauseid s ü m b o l e i s.

Sirged a ja b lõikuvad punktis M: $a \cap b = \{M\}$.

Sirged a ja b ühtivad: $a = b$.

Kaks sirget tasandil on kas paralleelsed või lõikuvad. Paralleelseteks sirgeteks nimetatakse sirgeid, millel on sama siht. **Paralleelsed** sirged kas ühtivad või neil puuduvad ühised punktid (joon. 10.3). Kaks sirget **lõikuvad,** kui neil on vaid üks ühine punkt (joon. 10.4).

Lauseid s ü m b o l e i s.

Sirged a ja b on paralleelsed: $a \parallel b$.

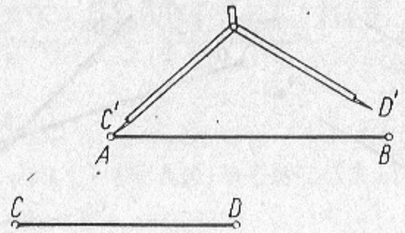
Sirged a ja b ei ole paralleelsed (s. o. lõikuvad): $a \nparallel b$.

Kahe lõikuva **sirge vaheliseks nurgaks** nimetatakse nurka (tavaliselt väiksemat), mille võrra tuleb pöörata üht sirget, et see ühtiks teise sirgega (joon. 10.4).

10.3. LÕIK

10.3.1. Lõik. Vt. art. 9.1.3.

10.3.2. Lõikude võrdlemine. Kaht lõiku nimetatakse **kongruentseteks** (ka võrdseteks), kui üht lõiku saab viia liikumisega ühtimisele teisega. Kongruentsete lõikude pikkused on võrdsed.



Joon. 10.5

Lõikude võrdlemine on kujutatud joonisel 10.5, kus $C'D'=CD$.

Lõikudest on lühem see lõik, mille pikkus on väiksem. Lauset «lõik AB on lühem kui lõik KL» kirjutatakse sümboleis $AB<KL$.

10.3.3. Tehted lõikudega

Def. Kahe lõigu **summaks** nimetatakse lõiku, mille pikkus on võrdne liidetavate lõikude pikkuste summaga.

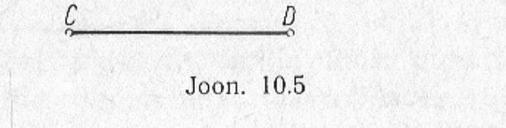
Konstruktsioon. Joonisel 10.6 on $KL=AB$ ja $LM=CD$ ning $KM=AB+CD$.

Lõikude summa on

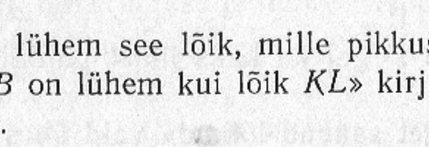
1) kommutatiivne: $AB+CD=CD+AB$;
2) assotsiatiivne: $(AB+CD)+EF=AB+(CD+EF)$.

Def. Kahe lõigu **vaheks** nimetatakse lõiku, mille pikkus on võrdne vastavate lõikude pikkuste vahega.

Konstruktsioon. Joonisel 10.7 on $KL=CD$ ja $ML=AB$ ning $KM=CD-AB$.



Joon. 10.6

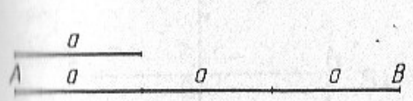


Joon. 10.7

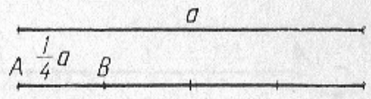
Def. Lõigu **korrutiseks naturaalarvuga** n nimetatakse lõiku, mille pikkus on n korda suurem kui antud lõigu pikkus.

Lõigu a korrutamiseks naturaalarvuga n võetakse lõiku a liidetavana n korda. Nii saadud lõiku tähistatakse sümboliga $n\cdot a$ või na. Joonisel 10.8 on $AB=3a$.

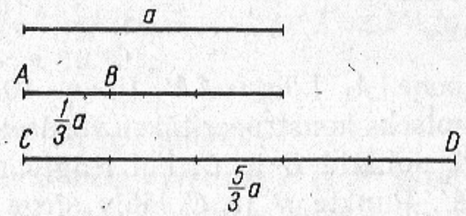
Def. Lõigu **jagatiseks naturaalarvuga** n nimetatakse lõiku, mille pikkus on n korda väiksem kui antud lõigu pikkus.



Joon. 10.8



Joon. 10.9



Joon. 10.10

Lõigu a jagamiseks naturaalarvuga n jaotatakse lõik a n võrdseks osaks. Jagatiseks, mida tähistatakse sümboliga $\frac{1}{n}\cdot a$ või $\frac{a}{n}$, on nii saadud lõigu a üks osa. Joonisel 10.9 $AB=\frac{1}{4}a$.

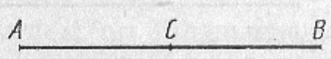
Lõigu a korrutamiseks positiivse ratsionaalarvuga $\frac{m}{n}$ tuleb lõik a jaotada n võrdseks osaks ning seejärel liita saadud osa m korda. Joonisel 10.10 on $AB=\frac{1}{3}a$ ning $CD=\frac{5}{3}a$.

10.3.4. Lõigu keskpunktiks nimetatakse punkti lõigul, mis jaotab selle lõigu kaheks võrdse pikkusega lõiguks.

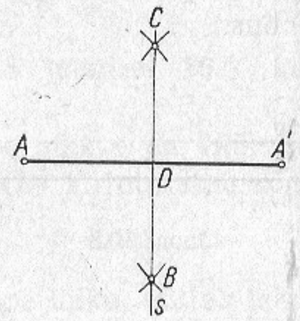
Näiteks joonisel 10.11 kujutatud lõigu AB keskpunktiks on punkt C, sest $AC=CB$.

Lõigu keskpunkt on lõigu sümmeetriakeskpunktiks.

Lõigu **keskristsirgeks** nimetatakse sirget, mis läbib lõigu keskpunkti ning on risti lõiguga.



Joon. 10.11



Joon. 10.12

Konstruktsioone. 1. Lõigu AA' (joon. 10.12) keskristsirge joonestamiseks konstrueeritakse võrdsete raadiustega ringjoonte lõikepunktid B ja C, kui ringjoonte keskpunktid on A ja A'. Punkte B ja C läbiv sirge s ongi lõigu AA' keskristsirge.

2. Lõigu AA' keskpunkt konstrueeritakse kui lõigu ja tema keskristsirge lõikepunkt D (joon. 10.12).

10.3.5. Lõikude suhe

Def. Lõikude **suhteks** nimetatakse nende pikkuste jagatist.

Lauset «lõikude AB ja CD suhe on $\frac{m}{n}$» kirjutatakse sümboleis

$$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}.$$

Lõikude suhe näitab, mitu korda on üks lõik (jagatav) pikem teisest lõigust või mitmendiku osa ta (jagatav) teisest lõigust moodustab.

Def. Nelja lõiku nimetatakse **võrdelisteks lõikudeks,** kui kahe lõigu suhe on võrdne ülejäänud kahe lõigu suhtega.

Lõikude a, b, c ja d võrdelisust väljendab võrdus

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Def. Lõiku a nimetatakse lõikude b ja c **geomeetriliseks keskmiseks (keskmiseks võrdeliseks),** kui

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{a} \text{ ehk } a^2=bc \text{ ehk } a=\sqrt{bc}.$$

Näide. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

10.4. SÜMMEETRIA

10.4.1. Teljeline sümmeetria

Def. Punkte P ja P' nimetatakse **sümmeetrilisteks punktideks sirge t suhtes,** kui sirge t on lõigu PP' keskristsirge (joon. 10.13).

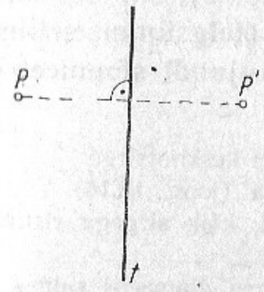
Öeldakse ka, et punkt P' (või P) on sümmeetriline punktiga P (P') sirge t suhtes.

Sirget t nimetatakse punktide P ja P' **sümmeetriateljeks.**

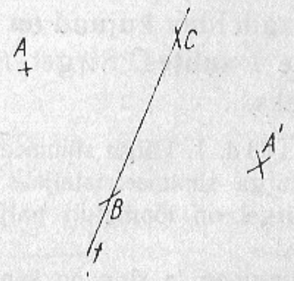
Sümmeetriatelje punktid on sümmeetrilised iseendaga.

Konstruktsioone. 1. Antud on punkt A ja sirge t (joon. 10.14). Konstrueerime punktiga A sümmeetrilise punkti sirge t suhtes.

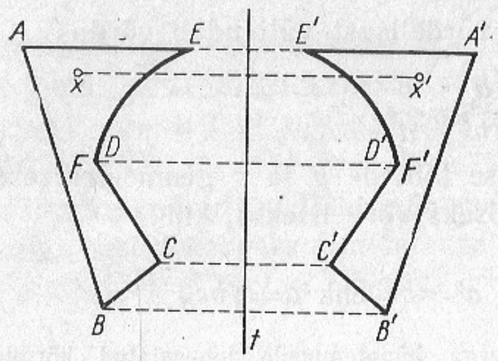
Selleks joonestame vabalt võetava raadiusega ringjoone, mille keskpunkt on punktis A ning lõikepunktid sirgega t on B ja C. Viimastest kui keskpunktidest joonestame



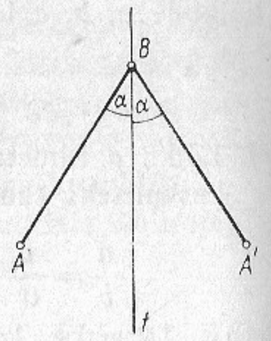
Joon. 10.13



Joon. 10.14



Joon. 10.15



Joon. 10.16

endise raadiusega ringjoonte kaared, mis lõikudes annavad otsitava punkti A'.

2. Antud punktide A ja A' sümmeetriatelg konstrueeritakse kui lõigu AA' keskristsirge s (joon. 10.12).

Def. Kujundeid F ja F' nimetatakse **sümmeetrilisteks kujunditeks sirge t suhtes,** kui kujundi F iga punkti korral leidub kujundil F' üks ja ainult üks temaga sirge t suhtes sümmeetriline punkt (joon. 10.15).

Öeldakse ka, et kujund F' (või F) on sümmeetriline kujundiga $F(F')$ sirge t suhtes.

Selleks, et konstrueerida antud kujundiga sümmeetrilist kujundit, tuleb konstrueerida antud kujundi iga punktiga sümmeetriline punkt antud sirge suhtes. Tegelikult konstrueeritakse vaid antud kujundi iseloomulikumate punktidega sümmeetrilised punktid, mis siis kindlas järjekorras vastavate joontega ühendatakse (joon. 10.15).

Kui leidub sirge t nii, et see jaotab kujundi kaheks sirge t suhtes sümmeetriliseks osaks (kujundiks), siis öeldakse, et vaadeldav **kujund on sümmeetriline (telgsümmeetriline) sirge t suhtes.** Sirget t nimetatakse **kujundi sümmeetriateljeks.**

Näited. 1. Lõigu sümmeetriateljeks on lõigu keskristsirge.
2. Nurga sümmeetriateljeks on nurgapoolitaja (joon. 10.16).
3. Sirgel on lõpmatult palju sümmeetriatelgi, kõik sirgega ristuvad sirged.
4. Ringjoon ja ring on sümmeetrilised iga oma diameetri suhtes.
5. Joonisel 10.17 on kujutatud mõned telgsümmeetrilised kujundid.

10.4.2 Tsentraalsümmeetria

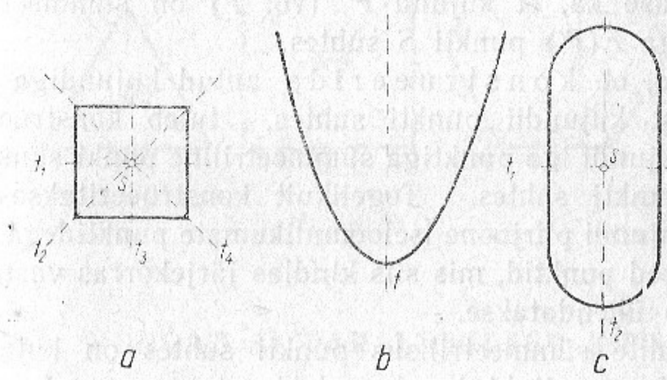
Def. Punkte P ja P' nimetatakse **sümmeetrilisteks punktideks punkti S suhtes,** kui punkt S on lõigu PP' keskpunkt.

Öeldakse ka, et punkt P' (või P) on sümmeetriline punktiga P (P') punkti S suhtes. Punkti S nimetatakse punktide P ja P' **sümmeetriakeskpunktiks.**

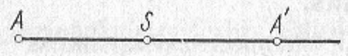
Konstruktsioone. 1. Antud on punkt A ja punkt S. Konstrueerime punktiga A sümmeetrilise punkti S suhtes.

Selleks joonestame kiire AS ja kanname sellele alates punktist S lõigu $SA'=AS$ (joon. 10.18). Otsitav punkt on A'.

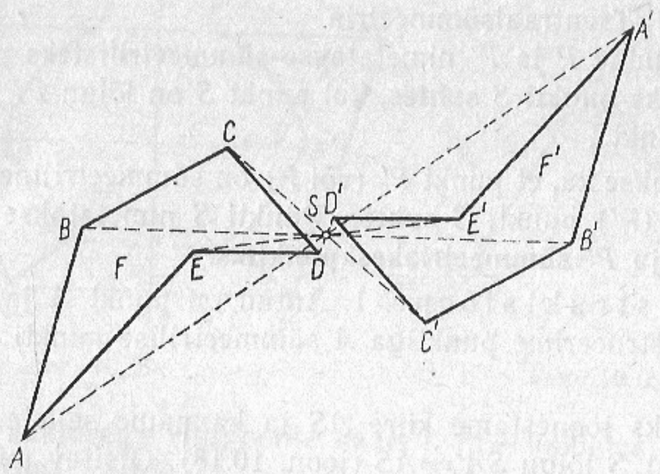
2. Antud on punktid A ja A' (joon. 10.18). Nende punktide sümmeetriakeskpunkti konstrueerimiseks konstrueerime lõigu AA' keskpunkti S.



Joon. 10.17



Joon. 10.18



Joon. 10.19

Def. Kujundeid F ja F' nimetatakse **sümmeetrilisteks kujunditeks** punkti S suhtes, kui kujundi F iga punkti korral leidub kujundil F' üks ja ainult üks temaga punkti S suhtes sümmeetriline punkt (joon. 10.19).

Öeldakse ka, et kujund F' (või F) on sümmeetriline kujundiga $F(F')$ punkti S suhtes.

Selleks, et konstrueerida antud kujundiga sümmeetrilist kujundit punkti suhtes, tuleb konstrueerida antud kujundi iga punktiga sümmeetriline punkt sümmeetriakeskpunkti suhtes. Tegelikult konstrueeritakse vaid antud kujundi piirjoone iseloomulikumate punktidega sümmeetrilised punktid, mis siis kindlas järjekorras vastavate joontega ühendatakse.

Kujundite sümmeetrilisus punkti suhtes on kujundite homoteetsuse erijuht, kus homoteetsustegur on -1.

Kui leidub punkt S nii, et kujundi igal punktil on punkti S suhtes sümmeetriline punkt samal kujundil, siis öeldakse, et kujund on tsentraalsümmeetriline ehk sümmeetriline punkti S suhtes. Punkti S nimetatakse **kujundi sümmeetriakeskpunktiks.**

Näiteid. 1. Lõigu sümmeetriakeskpunktiks on lõigu keskpunkt (joon. 10.18).

2. Sirge on tsentraalsümmeetriline oma iga punkti suhtes.

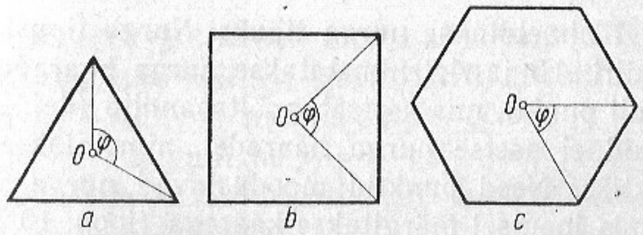
3. Ruut on tsentraalsümmeetriline diagonaalide lõikepunkti suhtes (joon. 10.17 a).

4. Ringjoon on tsentraalsümmeetriline oma keskpunkti suhtes.

Tsentraalsümmeetrilise kujundi mõistet üldistatakse järgmiselt.

Def. Kujundit F nimetatakse **k-ndat järku tsentraalsümmeetriliseks kujundiks keskpunktiga** O (ka **radiaalsümmeetriliseks** kujundiks), kui kujundi pööramisel ümber punkti O nurga $360° \cdot \frac{1}{k} (k \in \mathbf{N})$ võrra kujund ühtib iseendaga.

Näiteks võrdkülgne kolmnurk on kolmandat järku tsentraalsümmeetriline kujund ($\varphi = 120°$, $k = 3$), ruut neljandat järku tsentraalsümmeetriline kujund ($\varphi = 90°$, $k = 4$), korrapärane kuusnurk kuuendat järku tsentraalsümmeetriline ($\varphi = 60°$, $k = 6$) kujund (joon. 10.20). Viimase definitsiooni seisukohalt on tsentraalsümmeetriline kujund teist järku ($k = 2$).



Jon. 10.20

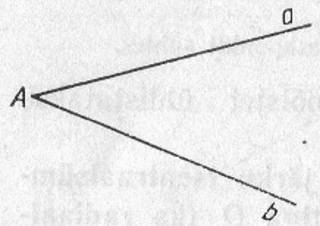
10.5. NURGAD JA PARALLEELSED SIRGED

10.5.1. Nurga mõiste. Sõltuvalt vajadusest defineeritakse nurka mitmeti.

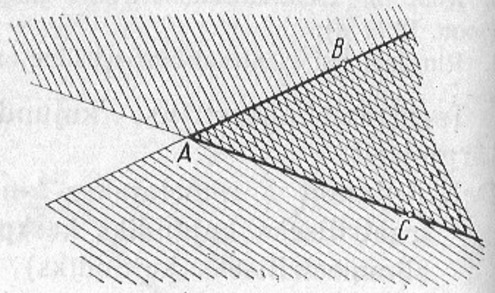
Def. 1. **Joonnurgaks** ehk **nurgaks** nimetatakse kujundit, mille moodustavad kaks ühest punktist väljuvat kiirt (joon. 10.21).

Def. 2. **Nurgaks** nimetatakse kahe lõikuvate või ühtivate äärtega kinnise pooltasandi ühisosa (joon. 10.22).

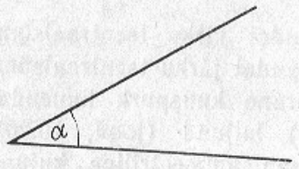
Pooltasandite äärte lõikepunkti (kiirte ühist algus-



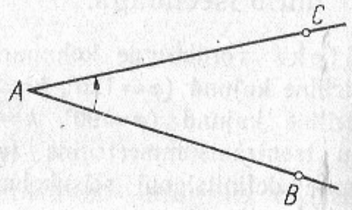
Joon. 10.21



Joon. 10.22



Joon. 10.23



Joon. 10.24

punkti) A nimetatakse **nurga tipuks.** Nurga tipust A väljuvaid kiiri AB ja AC nimetatakse **nurga haaradeks.**

Tasandi punkti, mis asetseb pooltasandite (def. 2) ühisosas, kuid ei asetse nurga haaradel, nimetatakse nurga sisepunktiks. Need punktid moodustavad **nurga sisepiirkonna,** mis joonisel märgitakse kaarega (joon. 10.23).

Nurka tipuga A ja haaradega AB ning AC tähistatakse sümboliga $\angle BAC$ või $\angle CAB$ (joon. 10.22). Sümboliga $\widehat{BAC}$ tähistatakse nurga suurust. Sageli ei tehta vahet nurgal (punktihulgana) ja nurga suurusel. Siis väljendid «nurk α», «nurk ABC» tähendavad nii geomeetrilisi objekte kui ka vastavate nurkade suurusi. Nurka tähistav kreeka täht α kirjutatakse joonisel nurga sisepiirkonda (joon. 10.23).

Def. 3.' **Nurgaks** nimetatakse punkti A ümber pöörleva kiire AX asendite ühendit algasendi (alghaara) AB ja lõppasendi (lõpphaara) AC vahel (joon. 10.24).

Nurka loetakse positiivseks, kui see tekkis kiire AX pöörlemisel vastupäeva (kellaosutite liikumisele vastupidises suunas), ja negatiivseks, kui see tekkis kiire pöörlemisel päripäeva (kellaosutite liikumise suunas). Geomeetriliselt märgitakse nurga suunda noolekesega nurga sisepiirkonda tähistaval kaarel (joon. 10.24).

10.5.2. Nurga mõõtmine. Nurga mõõtmisel loetakse nurga suurus võrdeliseks pöörleva kiire suvalise punkti poolt läbitud kaare pikkusega. Näiteks $\beta=2\alpha$, sest $\widehat{CD}=2\widehat{BC}$ ja $\alpha+\beta=3\alpha$, sest $\widehat{BD}=3\widehat{BC}$ (joon. 10.25). Nurga mõõtmiseks kasutatakse kaht mõõtühikute süsteemi: kraadimõõtu ja radiaanmõõtu.

Kraadimõõdu mõõtühikut nimetatakse **kraadiks** (ka **nurgakraadiks**), mis on $\frac{1}{360}$ täispöördest. Kraadi tähistatakse sümboliga °. Kraadist väiksemad mõõtühikud on **minut** (sümbol ′) ja **sekund** (sümbol ″). Minut on $\frac{1}{60}$ kraadist, sekund on $\frac{1}{60}$ minutist. Seega

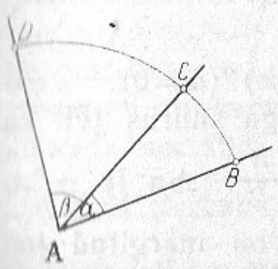
$$1°=60′ \text{ ja } 1′=60″ \text{ ehk } 1°=60′=3600″.$$

Nurka mõõdetakse malliga (joon. 10.26). Positiivse nurga mõõtarv on positiivne ($\alpha=55°$, joon. 20.26) ja negatiivse nurga mõõtarv negatiivne ($\beta=-125°$, joon. 10.26).

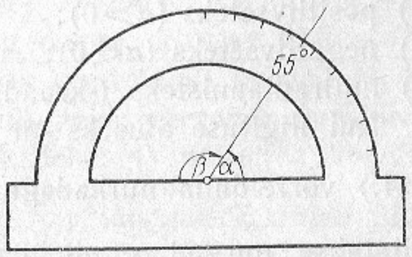
Radiaanmõõdu mõõtühikut nimetatakse **radiaaniks** (ka **nurgaradiaaniks**).

Def. Radiaan on kesknurk, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele **(kaareradiaanile).**

Radiaani tähistatakse sümboliga 1 rad või lihtsalt 1. Näiteks $\alpha=1{,}8703$ rad ehk $\alpha=1{,}8703$.



Joon. 10.25



Joon. 10.26

Täispöördes on $2\pi \approx 6{,}2832$ radiaani.

Kraadi- ja radiaanmõõdu vaheline seos avaldub võrdusena

$$180^\circ = \pi \text{ rad},$$

millest

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017453 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44{,}8''.$$

Üleminekuks kraadidelt radiaanidele ja vastupidi kasutatakse kas valemeid

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180} \text{ rad}, \quad \alpha \text{ rad} = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$$

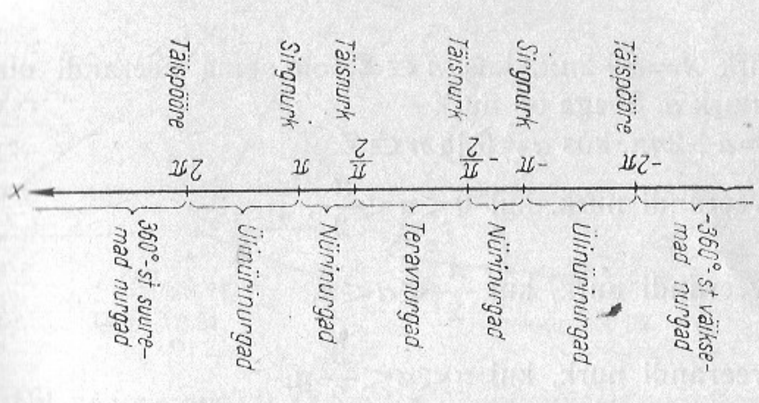
või vastavaid tabeleid (V. Bradise tabelid XI).

Tähtsamad nurgad kraadides ja radiaanides:

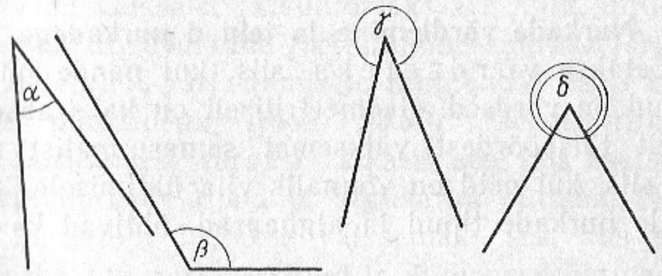
kraadimõõdus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radiaanmõõdus	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

10.5.3. Nurkade liigitamine sõltub sellest, mida võtta liigituse aluseks.

1. Kui liigituse aluseks on nurka moodustava kiire pöörlemise suund, siis nurgad liigitatakse
   1) positiivseteks ($\alpha > 0$);
   2) negatiivseteks ($\alpha < 0$);
   3) nullradiaanisteks (-kraadisteks) ($\alpha = 0$).
2. Kui liigituse aluseks on nurga suurus (vt. ka art. 12.3.1.) võrreldu na nurkadega $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ ja $\pm 2\pi$, siis liigitatakse nurgad x nii, nagu on märgitud joonisel 10.27. Joonisel 10.28 on kujutatud teravnurk (α), nüri-



Joon. 10.27



Joon. 10.28

nurk (β), ülinürinurk (γ) ja nurk, mis ületab täispöörde (δ)

Iga nurk x on esitatav kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ \quad \text{ehk} \quad \alpha + 2n\pi,$$

kus $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ või vastavalt $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ ning $n \in \mathbf{Z}$.

3. Kui liigituse aluseks on nurga lõpphaara asukoht koordinaattasandil tingimusel, et nurga tipp asub koordinaatide alguspunktis ning nurga alghaar ühtub abstsisstelje positiivse osaga, siis liigitatakse nurgad 1) esimese veerandi nurkadeks; 2) teise veerandi nurkadeks; 3) kolmanda veerandi nurkadeks; 4) neljanda veerandi nurkadeks; 5) nurkadeks $n \cdot \frac{\pi}{2}$, kus $n \in \mathbf{Z}$, mida nimetatakse vastavalt nende suurusele.

Nurk $x=\alpha+2n\pi$, kus $n\in\mathbf{Z}$, on sama veerandi nurk, mis nurk α. Seega on nurk

$x=\alpha+2n\pi$, kus $\alpha\neq 0$ ja $n\in\mathbf{Z}$

I veerandi nurk, kui $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

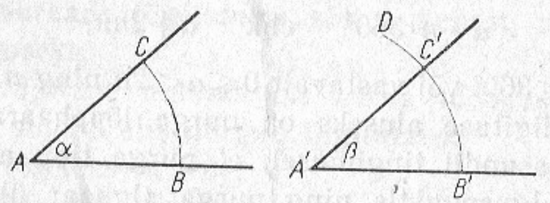
II veerandi nurk, kui $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

III veerandi nurk, kui $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$,

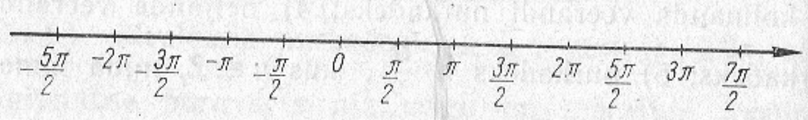
IV veerandi nurk, kui $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

10.5.4. Nurkade võrdlemine ja tehted nurkadega. Kaks nurka loetakse võrdseteks siis, kui nende nurkade mõõtarvud on võrdsed. Geomeetriliselt on kaks absoluutväärtuselt täispöördest väiksemat samasuunalist nurka võrdsed siis, kui neid on võimalik viia ühtimisele. (Viies ühtimisele nurkade tipud ja alghaarad, ühtivad ka lõpphaarad.)

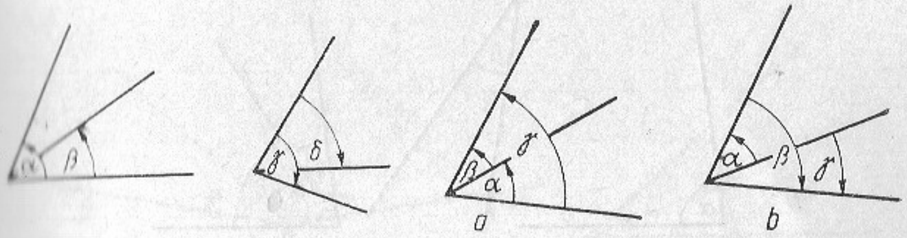
Antud nurgaga α (joon. 10.29) võrdse nurga β konstrueerimiseks joonestame kiire alguspunktiga A' ning keskpunktidest A ja A' võrdse raadiusega kaared BC ja $B'D$. Nüüd kanname kõõlu BC kaarele $B'D$ alates punktist



Joon. 10.29



Joon. 10.30



Joon. 10.31 Joon. 10.32

B'. Nii saame punkti C', mille ühendamisel punktiga A' saamegi nurga $\beta=\alpha$.

Kahest nurgast loetakse väiksemaks see nurk, mille mõõtarv on väiksem, ja suuremaks see nurk, mille mõõtarv on suurem. Nurkade järjestamine suuruse järgi taandub reaalarvude järjestamisele ning nurki saab kujutada arvtelje punktidena (joon. 10.30). Geomeetriliselt on kahest positiivsest nurgast väiksem see, mis asetseb teise sees, kui nurkade tipud ja alghaarad ühtivad. Negatiivsetest nurkadest loetakse väiksemaks see, mis sisaldab teist nurka, kui nurkade tipud ja alghaarad ühtivad.

Näiteks joonisel 10.31 on nurk β väiksem kui nurk α ($\beta<\alpha$), nurk γ on väiksem kui nurk δ ($\gamma<\delta$).

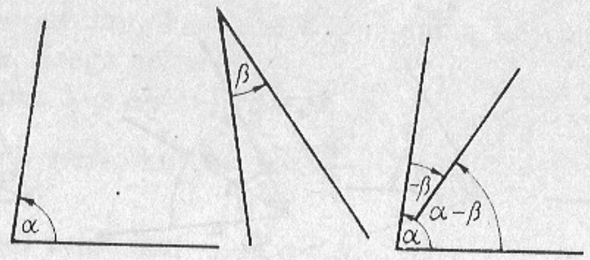
Kahe nurga summaks nimetatakse nurka, mille mõõtarv on võrdne liidetavate nurkade mõõtarvude summaga.

Näide. Nurkade 38°53′21″ ja 70°22′49″ summa arvutame järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 38°53'21'' \\ +\ 70°22'49'' \\ \hline 108°75'70''=109°16'10''. \end{array}$$

Geomeetriliselt on kahe nurga summaks nurk, mille moodustavad esimese liidetava alghaar ja teise liidetava lõpphaar tingimusel, et teise liidetava alghaar ning esimese liidetava lõpphaar ühtivad. Joonisel 10.32 on konstrueeritud nurkade α ja β summa γ.

Kahe nurga vaheks nimetatakse nurka, mille mõõtarv on võrdne vähendatava ja vähendaja mõõtarvude vahega.



Joon. 10.33

Näide. Nurkade 120°01′14″ ja 72°36′26″ vahe arvutame järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 120°01'14'' \\ -\ 72°36'26'' \\ \hline 47°24'48'' \end{array} \quad \text{või} \quad \begin{array}{r} 119°60'74'' \\ -\ 72°36'26'' \\ \hline 47°24'48'' \end{array}$$

Kahe nurga vahe konstrueerimiseks liidetakse vähendatavale vähendajaga vastandsuunaline nurk. Joonisel 10.33 on konstrueeritud nurkade α ja β vahe $\alpha - \beta$.

Nurga α *korrutiseks naturaalarvuga* n nimetatakse nurka, mille mõõtarv on $n\alpha$. Kui näiteks nurk $\alpha = 18°24'42''$ ja $n=5$, siis nurga $n\alpha$ leiame järgmiselt:

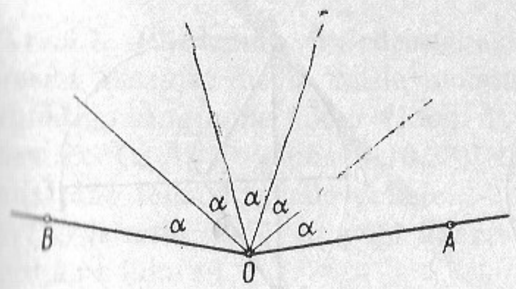
$$n\alpha = 5 \cdot 18°24'42'' = 90°120'210'' = 92°3'30''.$$

Geomeetriliselt saame nurga $n\alpha$, kui võtame nurga α liidetavaks n korda. Näiteks joonisel 10.34 on $\angle AOB = 5 \cdot \alpha$.

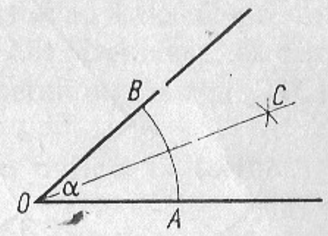
Nurga α *jagatiseks naturaalarvuga* n nimetatakse nurka, mille mõõtarv on $\frac{\alpha}{n}$. Kui näiteks nurk $\alpha = 47°16'27''$, siis $n=3$ korda väiksem nurk

$$\frac{\alpha}{3} = 47°16'27'' : 3 = 15°45'29''.$$

Geomeetriliselt taandub nurga $\frac{\alpha}{n}$ konstrueerimine nurga α jaotamisele n võrdseks osaks. Suhteliselt lihtne on seda teha siis, kui $n = 2^k$, kus $k \in \mathbf{N}$. Näiteks nurga $\frac{\alpha}{2}$ leidmine taandub nurgapoolitaja konstrueerimisele (joon. 10.35).



Joon. 10.34



Joon. 10.35

Osutub, et alati ei saa nurka α jaotada sirkli ja joonlauaga n võrdseks osaks, näiteks $n=3$ korral. Ülesannet jaotada nurk α kolmeks võrdseks osaks sirkli ja joonlaua abil on nimetatud nurga trisektsiooni ülesandeks ning see pärineb Vana-Kreekast umbes V sajandist e.m.a. Nurga trisektsiooni ülesande lahendamatus tõestati alles 1837. a.

10.5.5. Nurgapoolitaja. Nurgapoolitajaks nimetatakse kiirt (joon. 10.35, kiir OC), mis jaotab nurga kaheks võrdseks nurgaks.

Nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdsel kaugusel nurga haaradest.

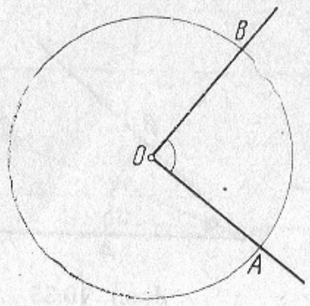
Konstruktsioon. Nurgapoolitaja (joon. 10.35) konstrueerimiseks joonestatakse suvalise raadiusega ringjoone kaar (keskpunkt nurga tipus O) ning nurga haarade lõikepunktid B ja A. Võttes need punktid uute sirgjoonte keskpunktideks, konstrueeritakse võrdse raadiusega ringjoonte kaarte lõikepunkt C, mis koos nurga tipuga O määrabki nurgapoolitaja a.

10.5.6. Kesknurk. Kesknurgaks (joon. 10.36) nimetatakse nurka, mille tipp asetseb ringjoone keskpunktis (kesknurgaks nimetatakse nurka, mille moodustavad ringjoone kaks raadiust). Ringjoone kaart ($\overset{\frown}{AB}$), mis jääb kesknurga ($\angle AOB$) sisepiirkonda, nimetatakse kaareks, millele kesknurk toetub.

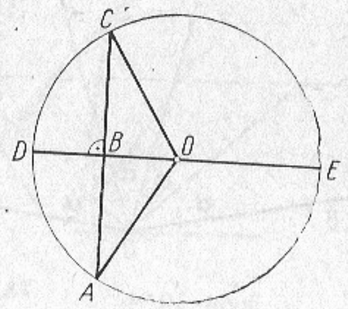
Kesknurka mõõdab kaar, millele ta toetub.

Lauseid kesknurga kohta.

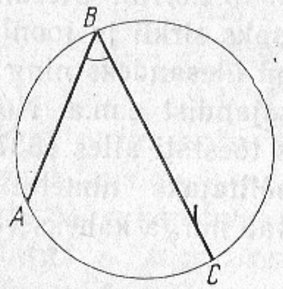
1. Kõõluga ristuv diameeter poolitab vastava kesknurga. Kui $DE \perp AC$, siis $\angle AOD = \angle DOC$ (joon. 10.37).



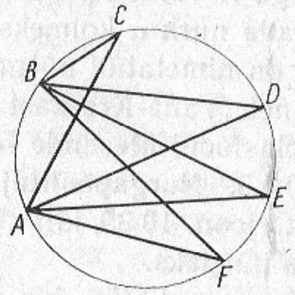
Joon. 10.36



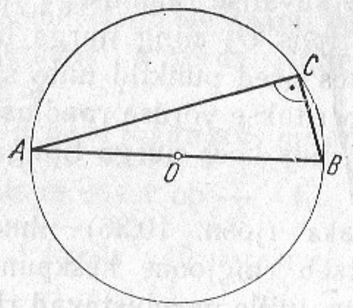
Joon. 10.37



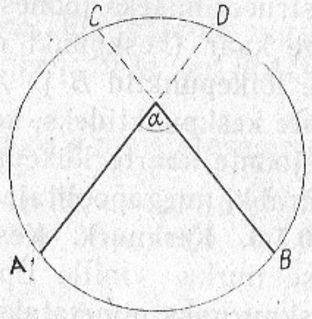
Joon. 10.38



Joon. 10.39



Joon. 10.40



Joon. 10.41

2. Kui ühes ja samas ringis või võrdsete raadiustega ringides on kesknurgad võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kaared ja kõõlud, kusjuures viimased on ringi keskpunktist võrdsel kaugusel.

3. Vt. art. 10.13.2. lause 2.

10.5.7. Piirdenurk. Piirdenurgaks nimetatakse sirgnurgast väiksemat nurka, mille moodustavad kaks ühise otspunktiga ringjoone kõõlu (joon. 10.38). Öeldakse, et piirdenurk ($\angle ABC$ joonisel 10.38) toetub kaarele ($\smile AC$), mis jääb tema haarade vahele.

Piirdenurka mõõdab pool kaarest, millele ta toetub.

Järeldusi.

1. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

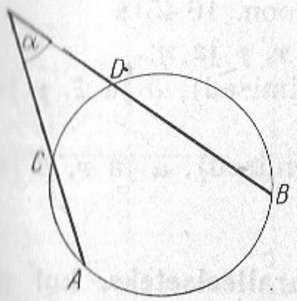
Näiteks $\angle AFB = \angle AEB = \angle ADB = \angle ACB$, sest nad toetuvad kaarele AB (joon. 10.39).

2. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk (joon. 10.40).

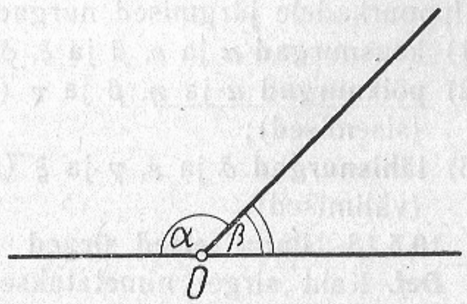
10.5.8. Nurk, mille tipp asetseb seespool ringjoont. Seda nurka mõõdab kahe kaare poolsumma. Üks kaar asetseb nurga haarade vahel, teine aga haarade pikenduste vahel. Nurga α (joon. 10.41) mõõtarv on võrdne kaarte AB ja CD mõõtarvude poolsummaga.

10.5.9. Nurk, mille tipp asetseb väljaspool ringjoont. Seda nurka, kui tema haarad lõikavad ringjoont, mõõdab nurga sees oleva kahe kaare poolvahe. Nurga α mõõtarv (joon. 10.42) on võrdne kaarte AB ja CD mõõtarvude poolvahega.

10.5.10. Kõrvunurgad. Kõrvunurkadeks nimetatakse kahte nurka, millel on üks ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirge (näiteks nurgad α ja β joonisel 10.43).



Joon. 10.42



Joon. 10.43

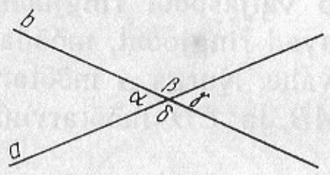
J ä r e l d u s i.

1. Kõrvunurkade summa on sirgnurk.
2. Võrdsed kõrvunurgad on täisnurgad.
3. Kahe sirge lõikumisel (joon. 10.44) tekib neli paari kõrvunurki: α ja β, β ja γ, γ ja δ, δ ja α.

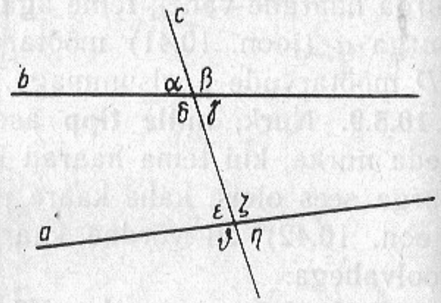
10.5.11. Tippnurgad. Kaht nurka nimetatakse **tippnurkadeks,** kui ühe nurga haarad on teise nurga haarade pikendusteks üle nurga tipu. Nurgad α ja γ ning β ja δ joonisel 10.44 on tippnurgad.

Tippnurgad on võrdsed.

Kahe sirge lõikumisel tekib üks paar teravnurkseid tippnurki ja üks paar nürinurkseid tippnurki (joon. 10.44) või neli täisnurka. Viimasel juhul öeldakse, et sirged ristuvad. Sirgete a ja b ristumist märgitakse sümboleis $a \perp b$.



Joon. 10.44



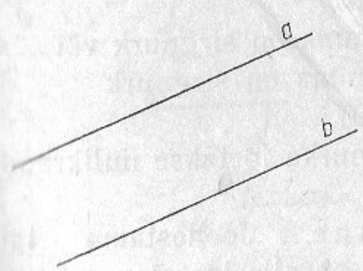
Joon. 10.45

10.5.12. Kahe sirge lõikamine kolmanda sirgega. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad lisaks kõrvu- ja tippnurkadele järgmised nurgad (joon. 10.45):

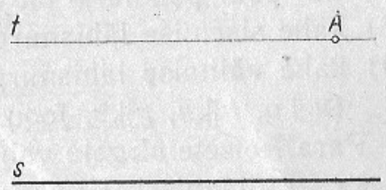
1) **kaasnurgad** α ja ε, β ja ξ, δ ja ν, γ ja η;
2) **põiknurgad** α ja η, β ja ν (välimised), δ ja ξ, γ ja ε (sisemised);
3) **lähisnurgad** δ ja ε, γ ja ξ (sisemised), α ja ν, β ja η (välimised).

10.5.13. Paralleelsed sirged

Def. Kaht sirget nimetatakse **paralleelseteks,** kui nad ühtivad või kui nende ühisosa on tühi.



Joon. 10.46



Joon. 10.47

Paralleelsed sirged ühtivad või neil puuduvad ühised punktid (joon. 10.46).

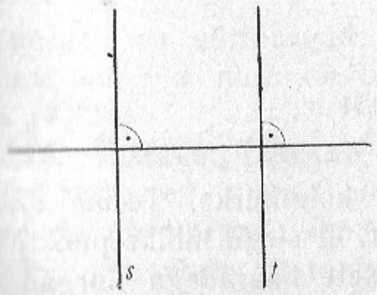
Paralleelsed sirged on samasihilised.

Tasandil kehtib paralleelide aksioom (art. 9.4.4.). Joonisel 10.47 $A \in t$, $t \parallel s$.

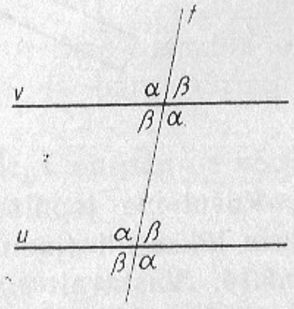
L a u s e i d.

1. Sirge, mis lõikab ühte kahest paralleelsest sirgest, lõikab ka teist sirget.
2. Kaks sirget, mis on paralleelsed ühe ja sama sirgega, on paralleelsed ka omavahel (transitiivsus).
3. Sirge, mis on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, on risti ka teise sirgega.
4. Kaks sirget, mis on risti kolmanda sirgega, on paralleelsed ($s \parallel t$, joon. 10.48).
5. P a r a l l e e l s u s e t u n n u s: kaks sirget on paralleelsed siis ja ainult siis, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega

1) üks paar kaasnurki on võrdsed,



Joon. 10.48



Joon. 10.49

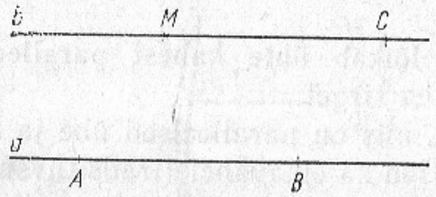
2) üks paar põiknurki on võrdsed;
3) kahe sisemise lähisnurga summa on sirgnurk või
4) kahe välimise lähisnurga summa on sirgnurk
($u \parallel v$, $t \nparallel u$, $t \nparallel v$, joon. 10.49).

Paralleelsete sirgete vahelist nurka loetakse nullkraadiseks (-radiaaniseks) nurgaks.

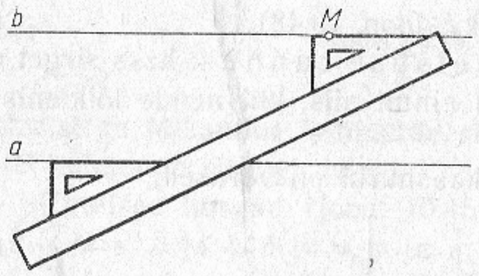
K o n s t r u k t s i o o n ü l e s a n n e. Joonestame läbi punkti M ($M \notin a$) sirge, mis on paralleelne sirgega a.

Vaatleme kaht konstrueerimisviisi.

1. Kasutame sirklit ja joonlauda. Võtame sirgel a suvalised punktid A ja B (joon. 10.50), joonestame keskpunktiga M ja raadiusega AB kaare ning keskpunktiga B ja raadiusega AM kaare (samal pool sirget a) nii, et need lõikuvad. Sirge b, mis läbib punkti M ja kaarte lõikepunkti C, ongi otsitav sirge.



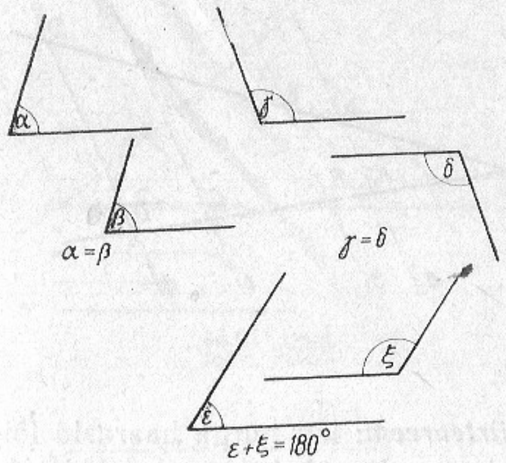
Joon. 10.50



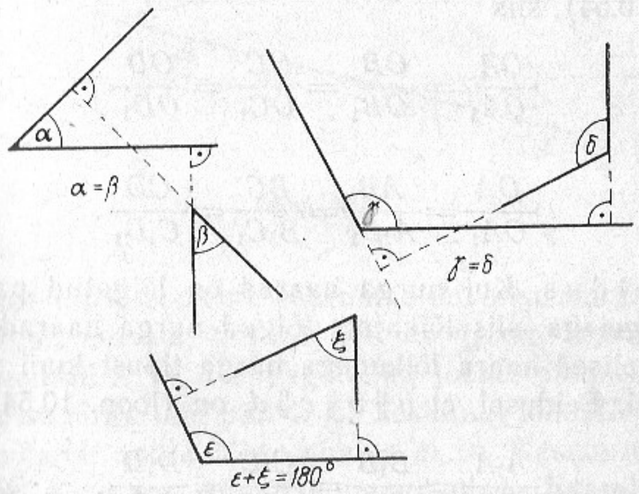
Joon. 10.51

2. Kasutame joonlauda ja kolmnurka. Teeme antud sirge a lükke nii (joon. 10.51), et sirge läbiks punkti M.

10.5.14. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõle-



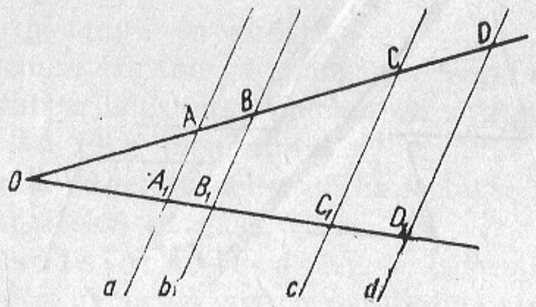
Joon. 10.52



Joon. 10.53

mad nurgad on nürinurgad; nende nurkade summa on sirgnurk, kui üks nurk on teravnurk ja teine nürinurk (joon. 10.52).

10.5.15. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad nurgad on nürinurgad; nende nurkade summa on sirgnurk, kui üks nurk on terav- ja teine nürinurk (joon. 10.53).



Joon. 10.54

10.5.16. ***Kiirteoreem*:** kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega. Kui $a \parallel b \parallel c \parallel d$ (joon. 10.54), siis

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1}=\frac{OD}{OD_1}$$

või

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}.$$

Järeldus. Kui nurga haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega, siis lõikajate lõigud nurga haarade vahel on võrdelised haara lõikudega nurga tipust kuni vastava lõikajani. Eeldusel, et $a \parallel b \parallel c \parallel d$, on (joon. 10.54)

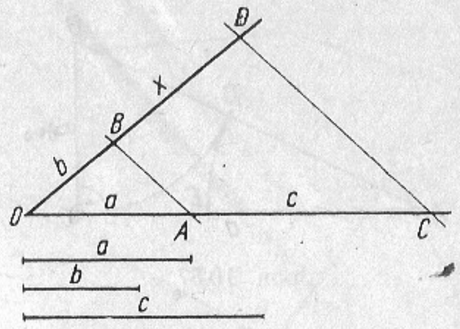
$$\frac{A_1A}{OA}=\frac{B_1B}{OB}=\frac{C_1C}{OC}=\frac{D_1D}{OD}.$$

***Kiirteoreemi pöördteoreem*:** kui kaks sirget lõikavad nurga haarasid nii, et ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised vastavate lõikudega nurga teisel haaral, siis need sirged on paralleelsed.

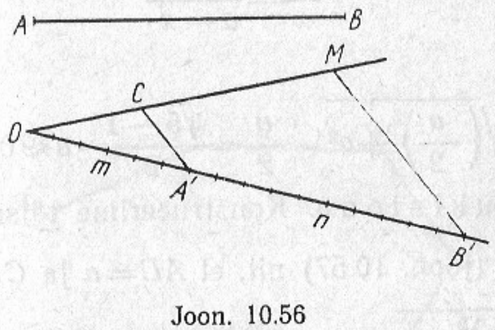
Konstruktsioonülesandeid. 1. Konstrueerime antud kolme lõigu a, b ja c neljanda võrdelise x.

Konstrueerida tuleb lõik x nii, et

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}.$$



Joon. 10.55



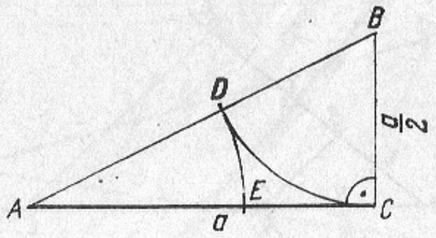
Joon. 10.56

Kasutame kiirteteoreemi. Kanname suvalise nurga haaradele lõigud $OA=a$, $OB=b$, $AC=c$ (joon. 10.55), ühendame punktid A ja B sirgega ning joonestame viimasega paralleelse sirge läbi punkti C. Tekkinud lõik $BD=x$.

2. Jaotame antud lõigu suhtes $m:n$. Kasutame kiirteteoreemi. Kanname suvalise nurga ühele haarale antud lõigu AB (joonisel 10.56 $OM=AB$), teisele haarale suvaliselt valitud lõiku m korda, saame punkti A', ning veel n korda, saame punkti B'. Ühendame viimase punktiga M ning konstrueerime läbi punkti A' lõiguga $B'M$ paralleelse lõigu $A'C$. Nüüd $OC:CM=m:n$.

10.5.17. Kuldlõige. Ülesanne, jaotada antud lõik kuldlõikes, tähendab: jaotada antud lõik kaheks osaks nii, et suurem osa oleks kogu lõigu ja selle väiksema osa keskmine võrdeline.

Tähistades antud lõigu tähega a ja selle suurema osa



Joon. 10.57

tähega x, tuleb konstrueerida lõik x nii, et

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$$

ehk

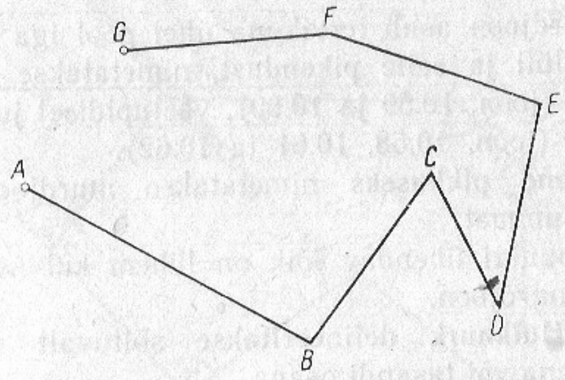
$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a\approx 0{,}618a.$$

K o n s t r u k t s i o o n. Konstrueerime täisnurkse kolmnurga ABC (joon. 10.57) nii, et $AC=a$ ja $CB=\frac{a}{2}$. Siis $AB=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Võttes hüpotenuusil lõigu $BD=\frac{a}{2}$, saame lõigu $AD=x$. Kandes omakorda lõigu $AD=x$ lõigule AC, saame punkti E, mis jaotabki lõigu $AC=a$ kuldlõikes.

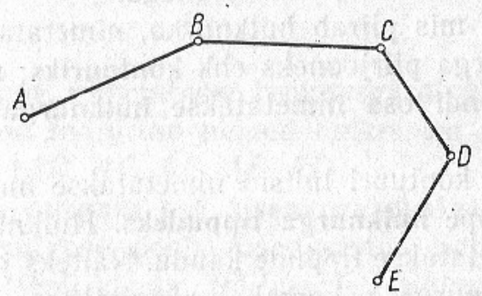
10.6. HULKNURK

10.6.1. Murdjoon. Murdjooneks $ABC\ldots LM$ nimetatakse kujundit, mis koosneb lõikudest AB, BC, ..., LM, kui punktid A, B, C, ..., L, M ei asu ühel sirgel. Punkte A ja M nimetatakse murdjoone otspunktideks, ülejäänud punkte B, C, ..., L aga murdjoone **tippudeks**. Murdjoont moodustavaid lõike AB, BC, ..., LM nimetatakse murdjoone **lülideks.**

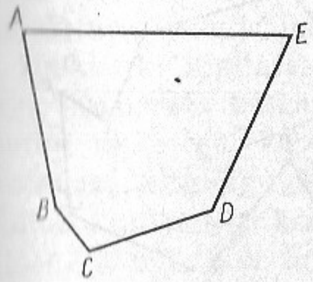
Murdjoont nimetatakse l a h t i s e k s, kui tema otspunktid ei ühti (joon. 10.58 ja 10.59) ning k i n n i s e k s, kui tema otspunktid ühtivad (joon. 10.60 ja 10.61).



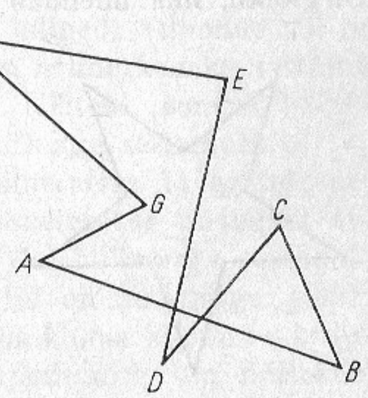
Joon. 10.58



Joon. 10.59



Joon. 10.60



Joon. 10.61

Kui murdjoon asub tervikuna ühel pool iga teda moodustavat lüli ja selle pikendust, nimetatakse murdjoont **kumeraks** (joon. 10.59 ja 10.60), vastupidisel juhul **mittekumeraks** (joon. 10.58, 10.61 ja 10.62).

Murdjoone pikkuseks nimetatakse murdjoone lülide pikkuste summat.

Kahte punkti ühendav lõik on lühem kui neid punkte ühendav murdjoon.

10.6.2. Hulknurk defineeritakse sõltuvalt vajadusest murdjoonena või tasandi osana.

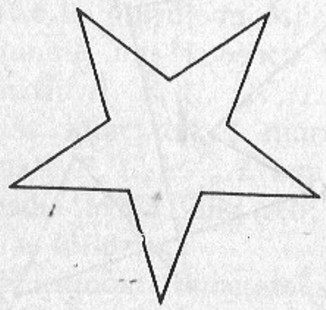
Def. 1. **Hulknurgaks** nimetatakse kinnist murdjoont (joon. 10.60, 10.61 ja 10.62).

Def. 2. **Hulknurgaks** nimetatakse tasandi osa koos seda piirava kinnise murdjoonega.

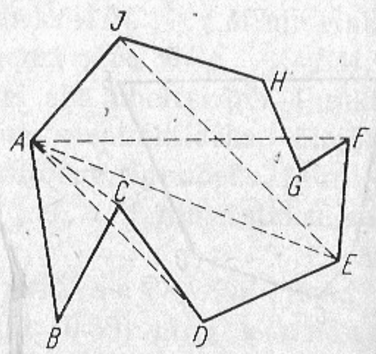
Murdjoont, mis piirab hulknurka, nimetatakse viimasel juhul hulknurga piirjooneks ehk **kontuuriks**; murdjoonega piiratud tasandi osa nimetatakse **hulknurga sisepiirkonnaks.**

Hulknurga kontuuri lülisid nimetatakse **hulknurga külgedeks** ja tippe **hulknurga tippudeks.** Hulknurka tähistatakse ja nimetatakse tippude kaudu. Näiteks joonisel 10.63 oleva hulknurga korral räägitakse hulknurgast *ABCDEFGHI*. Hulknurga külgi, millel on ühine otspunkt, nimetatakse **lähiskülgedeks.** Hulknurga **ümbermõõduks** loetakse hulknurga kontuuri (kui murdjoone) pikkust.

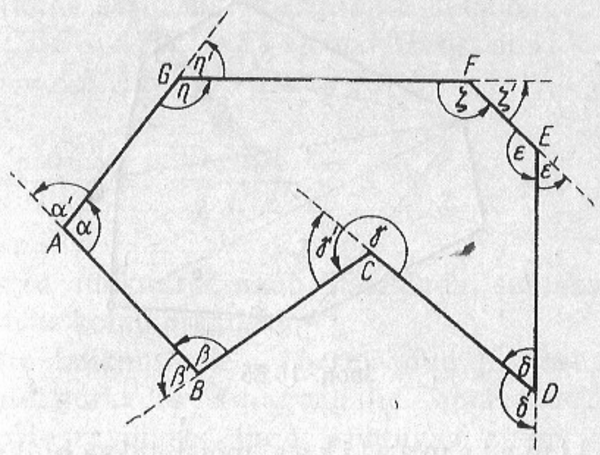
Sirglõiku, mis ühendab hulknurga mitte ühele küljele



Joon. 10.62



Joon. 10.63



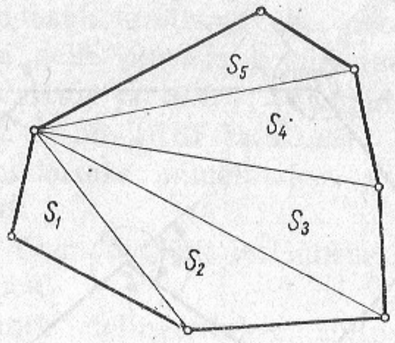
Joon. 10.64

kuuluvaid tippe, nimetatakse hulknurga **diagonaaliks**. Joonisel 10.63 on märgitud mõned hulknurga *ABCDEFGHI* diagonaalid (*AD*, *AC*, *AE*, *AF*, *EI*).

Hulknurga **nurgaks** ehk **sisenurgaks** nimetatakse hulknurga lähiskülgede poolt moodustatud nurka, mis jääb hulknurga sisepiirkonda. Näiteks nurgad α, β, γ, δ, ε, ξ ja η on hulknurga *ABCDEFG* nurgad (joon. 10.64). Hulknurga **välisnurgaks** nimetatakse sisenurga kõrvunurka (joonisel 10.64 nurgad α', β', γ', ..., η'), s. t. sisenurga ja vastava välisnurga summa on 180°.

Hulknurki liigitatakse külgede (tippude või nurkade) arvu järgi kolmnurkadeks, nelinurkadeks, viisnurkadeks jne., üldiselt n-nurkadeks. Näiteks joonisel 10.60 on kujutatud viisnurk, joonisel 10.61 aga seitsenurk.

Hulknurki liigitatakse ka kumerateks ja mittekumerateks. **Kumeraks hulknurgaks** nimetatakse niisugust hulknurka, mille igat kaht punkti (ka hulknurga sisepunkti) ühendava sirglõigu kõik punktid on hulknurga punktid. Kumera hulknurga kontuuriks on kumer kinnine murdjoon (joon. 10.60). Kui hulknurga kontuuriks on mittekumer kinnine murdjoon, siis nimetatakse hulknurka **mittekumeraks** (joon. 10.61, 10.62, 10.63, 10.64).



Joon. 10.65

K o o l i m a t e m a a t i k a s mõistetakse hulknurga all tavaliselt kumerat hulknurka.

Kumera hulknurga o m a d u s i.

1. Hulknurga diagonaalide arv on

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

kus n on hulknurga külgede arv.

2. Hulknurga sisenurkade summa on

$$(n-2)\ 180^\circ \quad \text{ehk} \quad (n-2)\pi \text{ rad},$$

kus n on hulknurga külgede arv.

Joonisel 10.64 on $n=7$ ja $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\xi+\eta=5\pi$ rad.

3. Hulknurga välisnurkade summa on 360° ehk 2π rad (joon. 10.64):

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon'+\xi'+\eta'=2\pi.$$

Hulknurga pindala saab arvutada nende kolmnurkade pindalade summana, milleks hulknurga ühest tipust väljuvad diagonaalid jaotavad hulknurga. Joonisel 10.65 on hulknurga pindala

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5.$$

10.6.3. Hulknurkade sarnasus

Def. Kaht hulknurka nimetatakse **sarnasteks,** kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

Hulknurkade sarnasust märgitakse sümboliga $\sim$.

Kui $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$ (joon. 10.66), siis

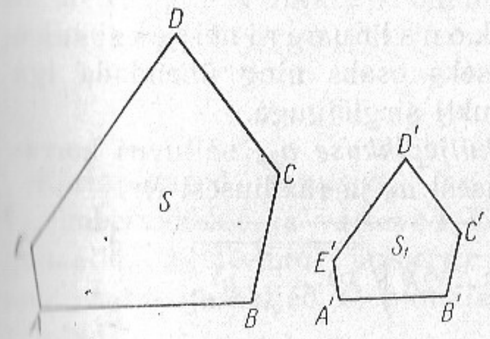
1) $\angle EAB=\angle E'A'B'$, $\angle ABC=\angle A'B'C'$, ..., $\angle DEA=\angle D'E'A'$.

2) $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\ldots=\frac{EA}{E'A'}$.

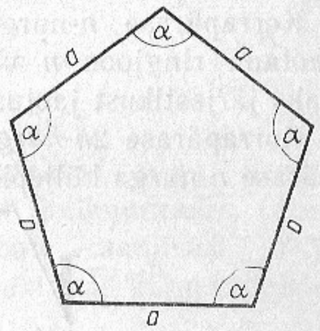
O m a d u s i.

1. Sarnaseid hulknurki saab tükeldada samaks arvuks sarnasteks kolmnurkadeks.
2. Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud ja vastavad lõigud hulknurkades (diagonaalid, apoteemid, ümberringjoonte raadiused jne.) suhtuvad nagu vastavad küljed.
3. Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud (joon. 10.66):

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A'B'^2}.$$



Joon. 10.66

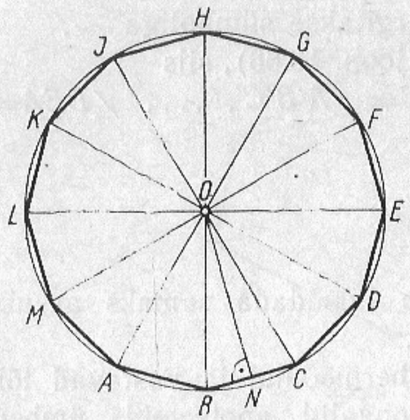


Joon. 10.67

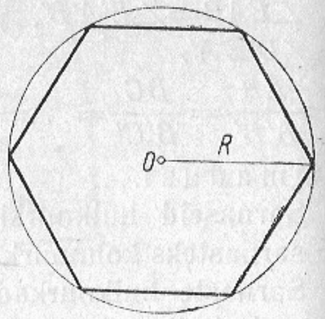
10.6.4. Korrapärane hulknurk

Def. **Korrapäraseks hulknurgaks** nimetatakse kumerat hulknurka, millel on võrdsed nii küljed kui ka nurgad (joon. 10.67).

Korrapärase hulknurga tipud on võrdsel kaugusel ühest kindlast punktist, mida nimetatakse hulknurga **keskpunktiks** (joonisel 10.68 punkt O).



Joon. 10.68



Joon. 10.69

Korrapärase hulknurga keskpunktist (O) raadiusega, mis võrdub keskpunkti ja tipu vahelise kaugusega (R) joonestatud ringjoont nimetatakse selle hulknurga **ümberringjooneks,** viimane läbib hulknurga tippe (joon. 10.69). Korrapärane hulknurk on oma ümberringjoone suhtes **kõõlhulknurk.**

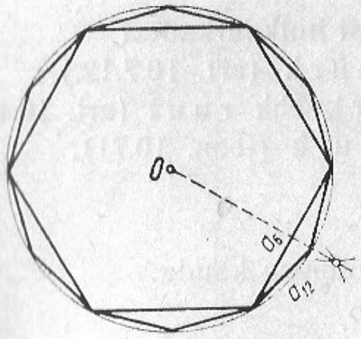
Korrapärase n-nurga konstrueerimiseks tuleb jaotada ringjoon n võrdseks osaks ning ühendada iga kaks järjestikust jaotuspunkti sirglõiguga.

Korrapärase $2n$-*nurga küljepikkuse* a_{2n} sõltuvus korrapärase n-nurga küljepikkusest a_n ja raadiusest R:

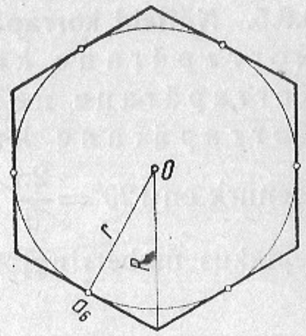
$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a_n^2}}.$$

Korrapärase $2n$-nurga konstrueerimiseks tuleb korrapärase n-nurga ühele küljele vastav ümberringjoone kaar poolitada ning alates saadud jaotuspunktist kanda ringjoonele kõõlud pikkusega a_{2n}. Ringjoonel tekkinud jaotuspunktide ja n-nurga tippude järjestikusel ühendamisel saadaksegi korrapärane $2n$-nurk (näide joonisel 10.70).

Korrapärase hulknurga keskpunkt on võrdsel kaugusel hulknurga külgedest. Hulknurga keskpunkti külje keskpunktiga ühendavat lõiku nimetatakse hulknurga **apoteemiks** (joonisel 10.68 ON).



Joon. 10.70



Joon. 10.71

Ringjoont, mille keskpunktiks on hulknurga keskpunkt ning raadiuseks r apoteem, nimetatakse hulknurga **siseringjooneks;** viimane puutub hulknurga külgi (joon. 10.71). Korrapärane hulknurk on oma siseringjoone suhtes **puutujahulknurk.**

Korrapärase n-nurkse *puutujahulknurga küljepikkus* b_n sõltub vastava n-nurkse kõõlhulknurga küljepikkusest a_n ja raadiusest R järgmiselt:

$$b_n=Ra_n:\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a_n^2}.$$

Korrapärased *n-nurgad on sarnased* ning nende 1) ümbermõõdud ja vastavad lõigud hulknurkades (diagonaalid, apoteemid, ümberringjoonte raadiused jne.) suhtuvad nagu küljed, 2) pindalad suhtuvad nagu külgede ruudud.

Korrapärase n-nurga iga nurk on

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n} \text{ ehk } \frac{(n-2)\pi}{n} \text{ rad.}$$

Korrapärase n-nurga ümbermõõt

$$2p=na_n,$$

kus a_n on hulknurga küljepikkus.

Korrapärase hulknurga pindala S võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega:

$$S=pr.$$

10.6.5. Näiteid korrapärastest hulknurkadest

1. K o r r a p ä r a n e k o l m n u r k (art. 10.7.12.).
2. K o r r a p ä r a n e n e l i n u r k ehk r u u t (art. 10.11).
3. K o r r a p ä r a n e k u u s n u r k (joon. 10.71).

Sisenurk on $120°=\frac{2\pi}{3}$ rad.

Küljepikkus ümberringjoone raadiuse kaudu:

$$a_6=R.$$

J ä r e l d u s. Korrapärase kuusnurga konstrueerimiseks tuleb kanda sirkliga ringjoonele järjest kõõlusid pikkusega R; ringjoone iga kaks järjestikust jaotuspunkti ühendada sirglõiguga.

Küljepikkus siseringjoone raadiuse kaudu:

$$a_6=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Pindala: $S=3a_6r=2r^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$.

4. K o r r a p ä r a n e k ü m m e n u r k.

Sisenurk on 144°.

Küljepikkus ümberringjoone raadiuse kaudu (art. 10.5.17.):

$$a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\approx 0{,}618R.$$

Korrapärase kümmenurga abil on võimalik konstrueerida korrapäraseid 5-, 10-, 20-, ..., $5\cdot 2^n$ nurki.

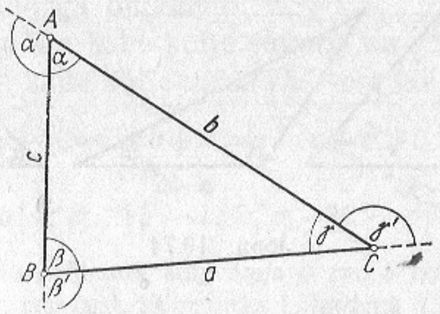
10.7. KOLMNURK.

Def. **Kolmnurgaks** nimetatakse hulknurka, millel on kolm külge (joon. 10.72).

Kolmnurka nagu hulknurkagi vaadeldakse vastavalt vajadusele murdjoonena või tasandi osana.

T ä h i s t u s e d (joonised 10.72 ja 10.75—10.79):

1) tipud A, B, C;



Joon. 10.72

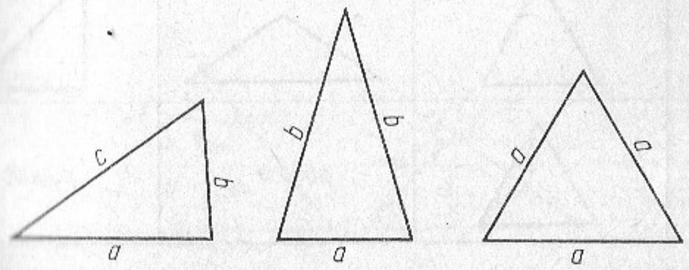
2) küljed a, b, c (tippude A, B, C vastas);
3) nurgad α, β, γ (külgede a, b, c vastas);
4) välisnurgad vastavalt α', β', γ';
5) kõrgused h_a, h_b, h_c (tõmmatud külgedele a, b, c);
6) mediaanid m_a, m_b, m_c (tõmmatud külgedele a, b, c);
7) nurgapoolitajad l_α, l_β, l_γ (nurkade α, β ja γ poolitajad);
8) sise- ja ümberringjoonte raadiused r ja R;
9) pindala S.

Kolmnurga e l e m e n t i d e k s nimetatakse tema külgi ja sisenurki.

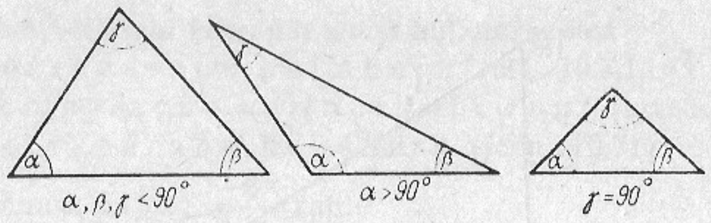
Kolmnurga nurga (näiteks α) haaradel asetsevaid külgi (b ja c) nimetatakse selle *nurga lähiskülgedeks*. Kolmnurga nurki, mille tippudeks on ühe külje otspunktid, nimetatakse selle *külje lähisnurkadeks*.

10.7.2. Kolmnurkade liigitamine

1. K ü l g e d e j ä r g i liigitatakse kolmnurgad (joon. 10.73):



Joon. 10.73



Joon. 10.74

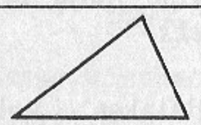
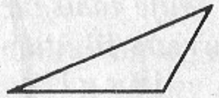
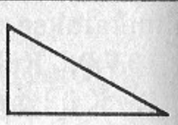
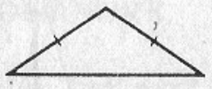
erikülgseteks (kõik küljed on erineva pikkusega),
võrdhaarseteks (kaks külge on võrdsed),
võrdkülgseteks (kõik küljed on võrdsed).

Võrdkülgsed kolmnurgad on samaaegselt ka võrdhaarsed kolmnurgad, seega pole liigitus ühene.

2. Nurkade järgi liigitatakse kolmnurgad (joon. 10.74):
teravnurkseteks (kõik nurgad on teravnurgad)
nürinurkseteks (üks nurk on nürinurk),
täisnurkseteks (üks nurk on täisnurk).

Terav- ja nürinurkseid kolmnurki nimetatakse ühise nimetusega kaldnurkseteks kolmnurkadeks.

Näide kolmnurkade liigitamisest kahe tunnuse järgi (joon. 10.75).

	Teravnurkne	*Nürinurkne*	*Täisnurkne*
Eri-külgne			
Võrd-haarne			
Võrd-külgne		*puudub*	*puudub*

Joon. 10.75

10.7.3. Kolmnurga omadusi

1. Kolmnurga iga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg ja iga kahe külje vahe väiksem kui kolmas külg:

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad a+c>b$$

ja

$$|a-b|<c, \quad |b-c|<a, \quad |a-c|<b.$$

Näide. Eksisteerib kolmnurk külgedega 6 cm, 8 cm ja 10 cm, sest need rahuldavad 1. omadust. Kolmnurka külgedega 6 cm, 8 cm, 15 cm aga ei eksisteeri, sest $6+8<15$ ja $15-6>8$.

2. Kolmnurga sisenurkade summa

$$\alpha+\beta+\gamma=180°=\pi \text{ rad}.$$

3. Kolmnurga välisnurkade summa

$$\alpha'+\beta'+\gamma'=360°=2\pi \text{ rad}.$$

4. Kolmnurga iga välisnurk on võrdne temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga:

$$\alpha'=\beta+\gamma, \quad \beta'=\alpha+\gamma, \quad \gamma'=\alpha+\beta.$$

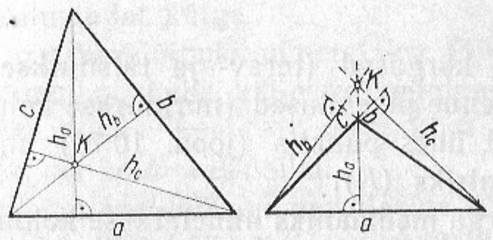
5. Kolmnurgas on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad ja võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

6. Kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk ja suurema nurga vastas suurem külg.

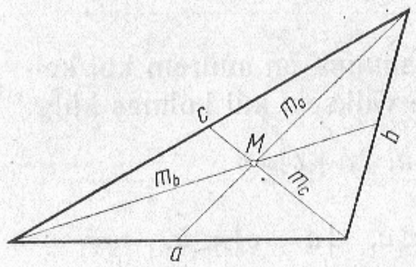
10.7.4. Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas

Def. Kolmnurga **kõrguseks** nimetatakse tipust vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud ristlõiku.

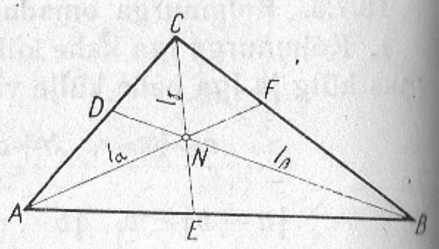
Kolmnurga külge, millele on tõmmatud kõrgus, nimetatakse kolmnurga **aluseks.**



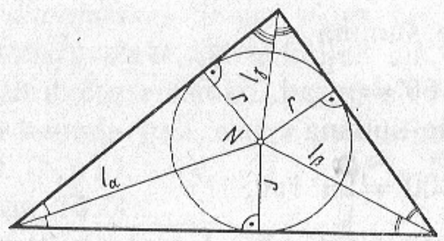
Joon. 10.76



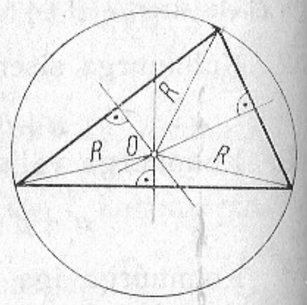
Joon. 10.77



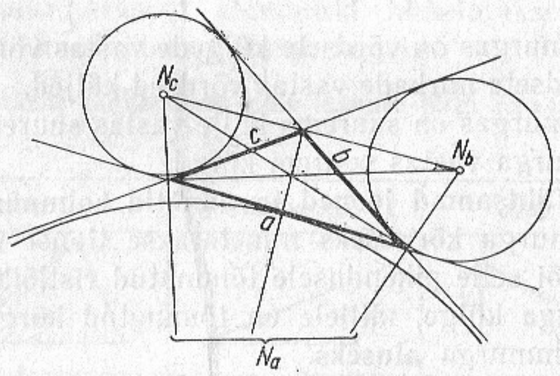
Joon. 10.78



Joon. 10.79



Joon. 10.80



Joon. 10.81

Kolmnurga kõrgused (terav- ja täisnurkse kolmnurga korral) või nende pikendused (nürinurkse kolmnurga korral) lõikuvad ühes punktis (joon. 10.76), mida nimetatakse **ortotsentriks** (K).

Def. Kolmnurga **mediaaniks** nimetatakse kolmnurga tipust vastaskülje keskpunkti tõmmatud lõiku.

Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis (joon. 10.77), mis on kolmnurga **raskuskese** (M).

Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid osadeks, mis suhtuvad nagu 1 : 2, kusjuures üks osa jääb külje poole ja kaks osa tipu poole.

Def. Kolmnurga **nurgapoolitajaks** ehk **bisektoriks** nimetatakse kolmnurga sisenurga poolitaja lõiku tipust vastasküljeni.

Kolmnurga iga nurgapoolitaja jaotab nurga tipu vastaskülje osadeks, mis suhtuvad nagu lähisküljed (joon. 10.78):

$$\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{CD}{DA}=\frac{BC}{BA},\quad \frac{AE}{EB}=\frac{CA}{CB}.$$

Kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis (N), mis on kolmnurga *siseringjoone keskpunkt*. Siseringjoone raadiuseks on nurgapoolitajate lõikepunkti kaugus kolmnurga külgedest (joon. 10.79).

Def. Kolmnurga **külje keskristsirgeks** nimetatakse sirget, mis läbib külje keskpunkti ja on küljega risti.

Kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad ühes punktis (O), mis on kolmnurga *ümberringjoone keskpunkt*. Ümberringjoone raadiuseks on keskristsirgete lõikepunkti kaugus kolmnurga tippudest (joon. 10.80).

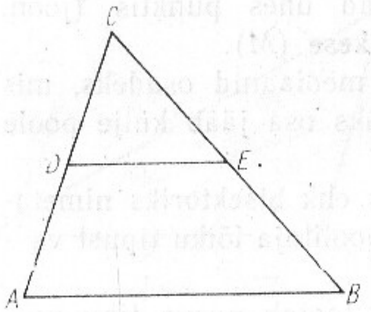
Kolmnurga ortotsenter, raskuskese ja ümberringjoone keskpunkt asetsevad ühel sirgel, mida nimetatakse **Euleri sirgeks.**

Kolmnurga iga kahe välisnurga poolitajad ja ühe sisenurga poolitaja lõikuvad ühises punktis (joon. 10.81 punktid N_a, N_b, N_c), mis on kolmnurga *külgringjoone keskpunkt*. Iga *külgringjoon* puutub kahe külje pikendusi ning kolmnurga kolmandat külge.

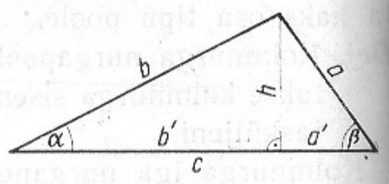
Def. Kolmnurga **kesklõiguks** nimetatakse lõiku, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte (joon. 10.82 lõik DE).

Kolmnurgal on kolm kesklõiku.

Kolmnurga iga kesklõik on paralleelne ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest (joon. 10.82):



Joon. 10.82



Joon. 10.83

$$DE \parallel AB \quad \text{ja} \quad DE = \frac{1}{2} AB.$$

10.7.5. Meetrilisi seoseid kolmnurgas. Meetriliste seoste all mõeldakse seoseid, mis väljendavad kujundite joonelementide mõõtmisega seotud omadusi valemi kujul.

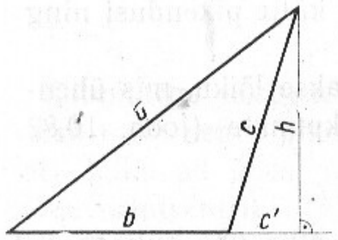
Kolmnurgas *teravnurga vastaskülje ruut* võrdub ülejäänud kahe külje ruutude summaga, millest on lahutatud ühe külje kahekordne korrutis teise külje projektsiooniga sellel küljel (joon. 10.83):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb',$$

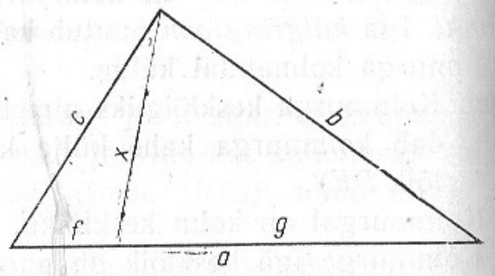
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca'.$$

Kolmnurgas *nürinurga vastaskülje ruut* võrdub ülejäänud kahe külje ruutude summaga, millele on liidetud ühe külje kahekordne korrutis teise külje projektsiooniga sellel küljel (joon. 10.84):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'.$$



Joon. 10.84



Joon. 10.85

Stuarti ***valem*** (joon. 10.85):

$$x = \sqrt{b^2 \cdot \frac{f}{a} + c^2 \cdot \frac{g}{a} - fg},$$

kus x on kolmnurga tipu kaugus vastaskülje mingist punktist ning f ja g on lõigud, milleks lõik x jaotab kolmnurga külje.

Mediaan (järeldus Stuarti valemist)

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2) - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2},$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Nurgapoolitaja (järeldus Stuarti valemist)

$$l_\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$l_\beta = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},$$

$$l_\gamma = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)},$$

kus $p = (a+b+c) : 2$.

Kõrgus

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kus $p = (a+b+c) : 2$;

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Siseringjoone raadius

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Ümberringjoone raadius

$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c} = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Külgringjoonte raadiused:

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a},$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b},$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r};$$

$$r_a + r_b + r_c - r = R.$$

10.7.6. Kolmnurga lõikude ning nurkade vahelisi seoseid

Siinusteoreem. Kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Koosinusteoreem. Kolmnurga ühe külje ruut on võrdne ülejäänud külgede ruutude summaga, millest on lahutatud nende külgede kahekordne korrutis külgedevahelise nurga koosinusega:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Tangensteoreem.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Projektsioonide teoreem.

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Poolnurga valemid.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Mediaan

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha},$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\beta},$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}.$$

Nurgapoolitaja

$$l_\alpha=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}=\frac{c\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}},$$

$$l_\beta=\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}=\frac{a\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}},$$

$$l_\gamma=\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}=\frac{b\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Kõrgus

$$h_a=b\sin\gamma=c\sin\beta,$$

$$h_b=a\sin\gamma=c\sin\alpha,$$

$$h_c=a\sin\beta=b\sin\alpha.$$

Siseringjoone raadius

$$r=(p-a)\tan\frac{\alpha}{2}=(p-b)\tan\frac{\beta}{2}=(p-c)\tan\frac{\gamma}{2},$$

$$r=p\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2},$$

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Külgringjoonte raadiused:

$$r_a=p\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$r_b=p\tan\frac{\beta}{2}=\frac{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

$$r_c=p\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Ümberringjoone raadius

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma},$$

$$R=\frac{p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

10.7.7. Kolmnurga pindala

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2},$$

$$S=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{ac\sin\beta}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2},$$

$$S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma},$$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heroni valem),

$S=pr,$

$S=\frac{abc}{4R},$

$S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$

$S=p^2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2},$

$S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c),$

$S=\sqrt{rr_ar_br_c}.$

10.7.8. Kolmnurga lahendamine. Kolmnurga lahendamise all mõeldakse tema antud elementide järgi puuduvate elementide (nurgad ja küljed) ning pindala leidmist.

Sõltuvalt andmetest eristatakse nelja kolmnurkade lahendamise põhijuhtu.

Näide 1. Antud: $a=10$, $\alpha=45°$, $\beta=60°$.
Lahendus. $\gamma=180°-(45°+60°)=75°$.

$$\frac{10}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin 75°}\Rightarrow$$

$$b=\frac{10\sin 60°}{\sin 45°}=5\sqrt{6},\quad b=12{,}25;$$

$$c=\frac{10\sin 75°}{\sin 45°}=5(\sqrt{3}+1),\quad c=13{,}66.$$

$$S=\frac{5\sqrt{6}\cdot 5(\sqrt{3}+1)\cdot\sin 45°}{2}=\frac{25(\sqrt{3}+3)}{2},\qquad S=59{,}15.$$

Antud elemendid	Puuduvate elementide ja pindala arvutamine	Märkused
1. Külg ja kaks nurka: a, α, β.	1) $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$; siinusteoreemist $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$; 2) $b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; 3) $c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; 4) $S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ või $S=\frac{bc\sin\alpha}{2}$.	
2. Kaks külge ja nurk nende vahel: a, b, γ.	1) koosinusteoreemist $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$; siinusteoreemist $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$; 2) $\sin\alpha=\frac{a\sin\gamma}{c}$; 3) $\sin\beta=\frac{b\sin\gamma}{c}$ või $\beta=180°-(\alpha+\gamma)$; 4) $S=\frac{ab\sin\gamma}{2}$.	Kui γ on teravnurk, siis külgedest a ja b suurema vastas võib olla nürinurk, mis tuleb leida viimasena
3. Kolm külge: a, b, c.	1) koosinusteoreemist $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; siinusteoreemist	

Antud elemendid	Puuduvate elementide ja pindala arvutamine	Märkused
	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$; 2) $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$; 3) $\sin\gamma=\frac{c\sin\alpha}{a}$ või $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$; 4) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ või $S=\frac{ab\sin\gamma}{2}$.	
4. Kaks külge ja neist ühe vastasnurk: a, b, α.	1) siinusteoreemist $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$; $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$ 2) $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$; 3) siinusteoreemist $c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; 4) $S=\frac{ab\sin\gamma}{2}$.	Lahend puudu kui 1) $90°\leqslant\alpha<18$ ja $a\leqslant b$, 2) $b\sin\alpha>a$. On üks lahen kui 1) $a>b$, 2) $a=b$ ja $\alpha<90°$, 3) $a=b\sin\alpha$ ja $\alpha<90°$. On kaks lahe dit, kui $b\sin\alpha<a<b$ ja $\alpha<90°$.

Näide 2. Antud: $b=8$, $c=15{,}5$, $\alpha=47°$.
Lahendus. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\Rightarrow$

$$a=\sqrt{8^2+15{,}5^2-2\cdot8\cdot15{,}5\cdot\cos47°},\quad a=11{,}62.$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow\sin\beta=\frac{8\cdot\sin47°}{11{,}62},\quad \beta=26°37';$$

$$\gamma=180°-(47°+26°37')=106°23'.$$

$$S=\frac{8\cdot15{,}5\cdot\sin47°}{2},\quad S=44{,}5.$$

Näide 3. Antud: $a=5$, $b=6$, $c=10$.
Lahendus. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\Rightarrow$

$$\cos\alpha=\frac{6^2+10^2-5^2}{2\cdot6\cdot10},\quad \alpha=22°20'.$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow\sin\beta=\frac{6\cdot\sin22°20'}{5},\quad \beta=27°8';$$

$$\gamma=180°-(22°20'+27°8'),\quad \gamma=130°32'.$$

$$S=\frac{5\cdot6\cdot\sin130°32'}{2},\quad S=11{,}4.$$

Näide 4. Antud: $a=20$, $b=30$, $\alpha=30°$.
Lahendus. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow\sin\beta=\frac{30\cdot\sin30°}{20}$,

$\beta_1=48°36'$ või $\beta_2=180°-48°36'=131°24'$;

$\gamma_1=180°-(30°+48°36')$, $\gamma_1=101°24'$,

$\gamma_2=180°-(30°+131°24')$, $\gamma_2=18°36'$.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow c_1=\frac{20\cdot\sin101°24'}{\sin30°},\quad c_1=39{,}21;$$

$$c_2=\frac{20\cdot\sin18°36'}{\sin30°},\quad c_2=12{,}76.$$

$$S_1=\frac{20\cdot30\cdot\sin101°24'}{2},\quad S_1=294{,}09;$$

$$S_2=\frac{20\cdot30\cdot\sin18°36'}{2},\quad S_2=95{,}7.$$

10.7.9. Kolmnurkade kongruentsus

Kahte kolmnurka nimetatakse **kongruentseteks**, kui nad sobival viisil teineteisele paigutatult ühtivad.

Kaks kolmnurka on kongruentsed siis ja ainult siis, kui ühe kolmnurga küljed ja nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgede ja nurkadega.

Kolmnurkade kongruentsust on võimalik kindlaks teha nende kõiki külgi ja nurki võrdlemata. Selleks kasutatakse *kolmnurkade kongruentsuse tunnuseid.*

1) Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga. (Tunnus KNK).

2. Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja selle lähisnurkadega. (Tunnus NKN).

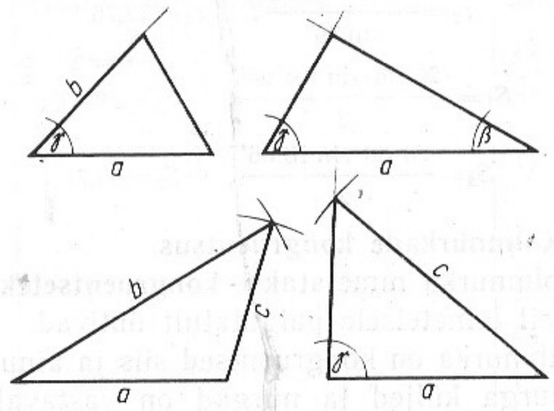
3. Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. (Tunnus KKK).

4. Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja pikema külje vastasnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja pikema külje vastasnurgaga. (Tunnus KKN).

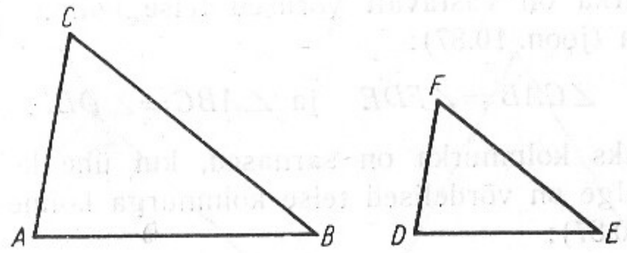
Kolmnurka on võimalik konstrueerida (joon. 10.86)

1) kahe külje ja nendevahelise nurga järgi;
2) ühe külje ja selle kahe lähisnurga järgi;
3) kolme külje järgi;
4) kahe külje ja nendest suurema vastasnurga järgi.

Kolmnurga k o n s t r u e e r i m i s t on otstarbekas alustada ühe külje (neljandal juhul väiksema külje) konstru-



Joon. 10.86



Joon. 10.87

eerimisest, seejärel konstrueerida nurgad ning ülejäänud küljed (juhud 1, 2, 4). Juhul 3 konstrueerida ülejäänud külgede kui raadiustega ringjooned, mille keskpunktid on esmalt joonestatud külje otspunktides; ringjoonte lõikepunkt on konstrueeritava kolmnurga kolmas tipp.

10.7.10. Kolmnurkade sarnasus. Vastavalt hulknurkade sarnasuse definitsioonile (art. 10.6.3.) nimetatakse kahte kolmnurka s a r n a s t e k s, kui ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Seega $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (joon. 10.87), kui

$$\angle CAB = \angle FDE,\ \angle ABC = \angle DEF,\ \angle BCA = \angle EFD$$

ja

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$$

Kolmnurkade sarnasust on võimalik kindlaks teha kõiki loetletud tingimusi kontrollimata. Piisab teatud tingimuste täidetuse kontrollist. *Kolmnurkade sarnasuse tunnused.*

1. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (joon. 10.87):

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \quad \text{ja} \quad \angle ABC = \angle DEF.$$

2. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga

kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga (joon. 10.87):

$$\angle CAB=\angle FDE \quad \text{ja} \quad \angle ABC=\angle DEF.$$

3. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdelised teise kolmnurga kolme küljega (joon. 10.87):

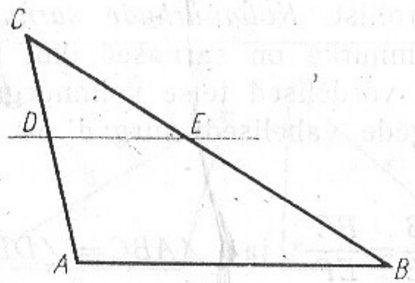
$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}.$$

4. Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asub nimetatud külgedest suurema vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas (joon. 10.87):

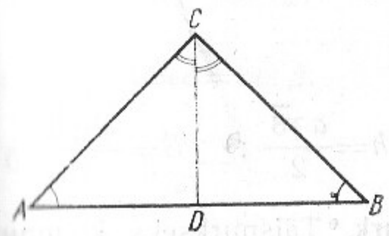
$$\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}, \quad AB>AC, \quad \angle ACB=\angle DFE.$$

Järeldusi.

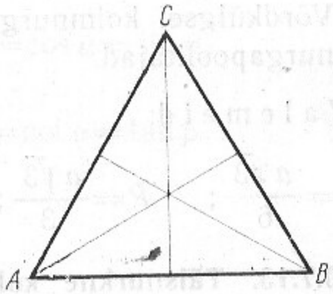
1. Vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurgad on sarnased.
2. Homoteetsed kolmnurgad (art. 10.15.6.) on sarnased.
3. Kolmnurga lõikamisel küljega paralleelse sirgega eraldub kolmnurk, mis on sarnane esialgse kolmnurgaga (joon. 10.88 $\triangle DEC\sim\triangle ABC$).
4. Sarnaste kolmnurkade ümbermõõdud ja vastavad lõigud kolmnurgas (kõrgused, ümberringjoonte raadiused jne.) suhtuvad nagu vastavad küljed.
5. Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.



Joon. 10.88



Joon. 10.89



Joon. 10.90

10.7.11. Võrdhaarne kolmnurk. Võrdhaarseks kolmnurgaks nimetatakse kolmnurka, mille kaks külge on võrdsed (joon. 10.89, $AC=BC$). Võrdseid külgi (AC ja BC) nimetatakse võrdhaarse kolmnurga **haaradeks** ning kolmandat külge (AB) **aluseks.** Aluse vastasnurka ($\angle ACB$) nimetatakse kolmnurga **tipunurgaks** ja aluse lähisnurki **alusnurkadeks** ($\angle BAC$ ja $\angle ABC$).

Omadusi.

1. Võrdhaarne kolmnurk on sümmeetriline tipunurga poolitaja suhtes.
2. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga tipust tõmmatud kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja ühtivad (joon. 10.89, CD).
3. Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

Võrdhaarse kolmnurga erijuhuks on võrdkülgne kolmnurk.

10.7.12. Võrdkülgseks kolmnurgaks nimetatakse kolmnurka, mille kõik küljed on võrdsed (joon. 10.90).

Omadusi.

1. Võrdkülgne kolmnurk on korrapärane.
2. Võrdkülgse kolmnurga nurgad on 60°.
3. Võrdkülgse kolmnurga samast tipust tõmmatud kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja ühtivad.

4. Võrdkülgsel kolmnurgal on kolm sümmeetriatelge — nurgapoolitajad.

Valemeid:

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R=\frac{a\sqrt{3}}{3};\quad h=\frac{a\sqrt{3}}{2};\quad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

10.7.13. Täisnurkne kolmnurk. Täisnurkseks kolmnurgaks nimetatakse kolmnurka, mille üks nurk on täisnurk (joon. 10.91). Täisnurkse kolmnurga ristuvaid külgi (a ja b) nimetatakse kaatetiteks ning kolmandat külge (c) hüpotenuusiks.

Seoseid täisnurkses kolmnurgas.

1. Teravnurkade summa

$$\alpha+\beta=90°.$$

2. Pythagorase ***teoreem***: hüpotenuusi ruut on võrdne kaatetite ruutude summaga:

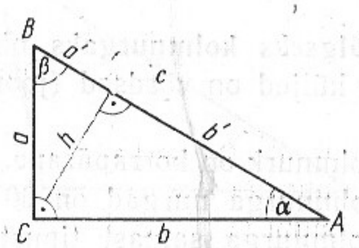
$$a^2+b^2=c^2.$$

3. Eukleidese ***teoreem***: täisnurkse kolmnurga kaateti ruut on võrdne hüpotenuusil võetud selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega:

$$a^2=a'c \quad \text{ja} \quad b^2=b'c.$$

4. Täisnurkse kolmnurga kõrguse ruut on võrdne kaatetite projektsioonide korrutisega:

$$h^2=a'\cdot b'.$$



Joon. 10.91

5. $\frac{a}{c}=\sin\alpha=\cos\beta,\quad \frac{b}{c}=\cos\alpha=\sin\beta,$

$\frac{a}{b}=\tan\alpha=\cot\beta,\quad \frac{b}{a}=\cot\alpha=\tan\beta.$

6. $r=\frac{a+b-c}{2}.$

7. $R=\frac{c}{2}.$

8. $S=\frac{ab}{2}.$

Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui

1) ühe kolmnurga kaatetid on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaatetitega,

2) ühe kolmnurga kaatet ja selle juures olev teravnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kaateti ja selle juures oleva teravnurgaga,

3) ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga,

4) ühe kolmnurga hüpotenuus ja teravnurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga hüpotenuusi ja teravnurgaga.

Sõltuvalt andmetest eristatakse nelja *täisnurksete kolmnurkade lahendamise* põhijuhtu.

Antud element	Puuduvate elementide ja pindala arvutamine
1. Kaatetid a ja b.	1) nurk α seosest $\tan\alpha=\frac{a}{b}$; 2) nurk β seosest $\alpha+\beta=90°$; 3) hüpotenuus c seosest $c^2=a^2+b^2$ või seosest $\frac{a}{c}=\sin\alpha$; 4) $S=\frac{ab}{2}$.

Antud elemendid	Puuduvate elementide ja pindala arvutamine
2. Hüpotenuus c ja kaatet (a või b).	1) nurk α seosest $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ või seosest $\cos\alpha=\frac{b}{c}$; 2) nurk β seosest $\alpha+\beta=90°$; 3) kaatet (b või a) seosest $a^2+b^2=c^2$ või vastavalt seostest $\frac{b}{c}=\sin\beta$ või $\frac{a}{c}=\sin\alpha$; 4) $S=\frac{ab}{2}$.
3. Kaatet (a või b) ja teravnurk (α või β).	1) nurk seosest $\alpha+\beta=90°$; 2) kaatet seosest $\frac{a}{b}=\tan\alpha$ või $\frac{b}{a}=\tan\beta$; 3) hüpotenuus vastavalt seosest $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ või $\frac{b}{c}=\sin\beta$ või seosest $c^2=a^2+b^2$; 4) $S=\frac{ab}{2}$.
4. Hüpotenuus c ja teravnurk (α või β).	1) nurk seosest $\alpha+\beta=90°$; 2) kaatetid seostest $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ ja $\frac{b}{c}=\sin\beta$; 3) $S=\frac{ab}{2}$.

Näide 1. $a=8$, $b=6$.

$$\tan\alpha=\frac{8}{6},\quad \tan\alpha=1{,}333,\quad \alpha=53°8';$$

$$\beta=90°-53°8',\quad \beta=36°52';$$

$$c^2=8^2+6^2,\quad c=\sqrt{100},\quad c=10;$$

$$S=\frac{8\cdot6}{2},\quad S=24.$$

Näide 2. $a=3$, $c=7$.

$$\sin\alpha=\frac{3}{7},\quad \sin\alpha=0{,}4286,\quad \alpha=25°23';$$

$$\beta=90°-25°23',\quad \beta=64°37';$$

$$b^2=7^2-3^2,\quad b=\sqrt{40},\quad b=6{,}32;$$

$$S=\frac{3\cdot6{,}3}{2},\quad S=9{,}45.$$

Näide 3. $a=5$, $\alpha=50°$

$$\beta=90°-50°,\quad \beta=40°;$$

$$\frac{5}{b}=\tan 50°,\quad b=\frac{5}{1{,}1918},\quad b=4{,}20;$$

$$\frac{5}{c}=\sin 50°,\quad c=\frac{5}{0{,}766},\quad c=6{,}53;$$

$$S=\frac{5\cdot4{,}2}{2},\quad S=10{,}5.$$

Näide 4. $c=3{,}5$, $\alpha=20°12'$.

$$\beta=90°-20°12',\quad \beta=69°48';$$

$$\frac{a}{3{,}5}=\sin 20°12',\quad a=3{,}5\cdot0{,}3453,\quad a=1{,}21;$$

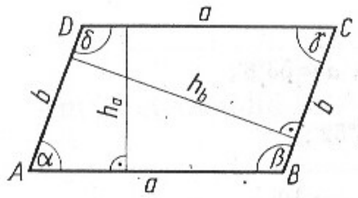
$$\frac{b}{3{,}5}=\sin 69°48',\quad b=3{,}5\cdot0{,}9385,\quad b=3{,}28;$$

$$S=\frac{1{,}21\cdot3{,}28}{2},\quad S=1{,}98.$$

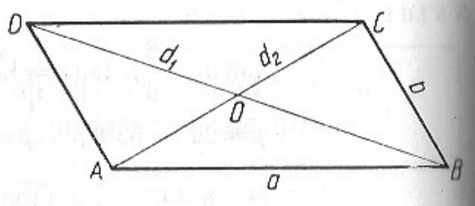
10.8. RÖÖPKÜLIK

Def. **Rööpkülikuks** nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed.

Joonisel 10.92 on rööpkülik, seega $AD \parallel BC$ ja $AB \parallel DC$.



Joon. 10.92



Joon. 10.93

O m a d u s i.

1. Rööpküliku vastasküljed on võrdsed:

$$AB=DC \quad \text{ja} \quad AD=BC.$$

2. Rööpküliku vastasnurgad on võrdsed:

$$\alpha=\gamma \quad \text{ja} \quad \beta=\delta.$$

3. Rööpküliku iga külje lähisnurkade summa on 180°:

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=180°.$$

4. Rööpküliku diagonaal jaotab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks.
5. Rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist (joon. 10.93).

$$AO=OC \quad \text{ja} \quad BO=OD.$$

6. Rööpküliku diagonaalide ruutude summa on võrdne külgede ruutude summaga:

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

7. Rööpküliku sümmeetriakeskpunktiks on diagonaalide lõikepunkt (O).

Rööpküliku **kõrguseks** nimetatakse tema vastaskülgede vahelist kaugust. Rööpkülikul on kaks kõrgust (joonisel 10.92 h_a ja h_b).

Rööpküliku pindala (joon. 10.92)

$$S=ah_a=bh_b=ab\sin\alpha=ab\sin\beta.$$

Rööpküliku eriliigid (joon. 10.94) on ristkülik (art. 10.9.), romb (art. 10.10.), ruut (art. 10.11.).

10.9. RISTKÜLIK

Def. **Ristkülikuks** nimetatakse rööpkülikut, mille üks nurk on täisnurk (joon. 10.95).

O m a d u s i (joon. 10.95).

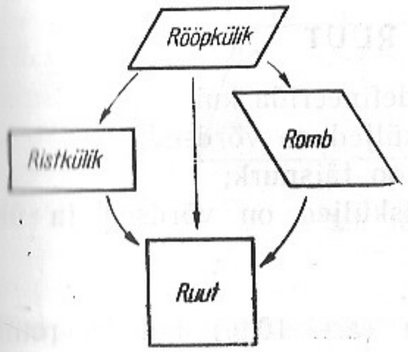
1. Ristkülikul on kõik rööpküliku omadused (art. 10.8).
2. Ristküliku kõik nurgad on täisnurgad.
3. Ristküliku diagonaalid on võrdsed.
4. Ristkülikul on ümberringjoon, mille keskpunktiks on diagonaalide lõikepunkt (O) ning raadiuseks pool diagonaali:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

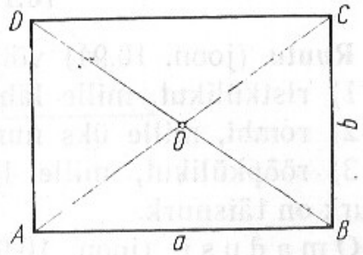
5. Ristkülikul on kaks sümmeetriatelge (külgede keskristsirged) ja sümmeetriakeskpunkt (sümmeetriatelgede või diagonaalide lõikepunkt).

Ristküliku pindala

$$S=ab.$$



Joon. 10.94



Joon. 10.95

10.10. ROMB

Def. **Rombiks** nimetatakse rööpkülikut, mille lähisküljed on võrdsed (joon. 10.94).

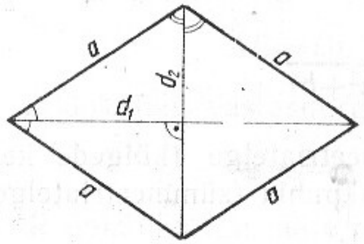
O m a d u s i (joon. 10.96).

1. Rombil on kõik rööpküliku omadused (art. 10.8.).

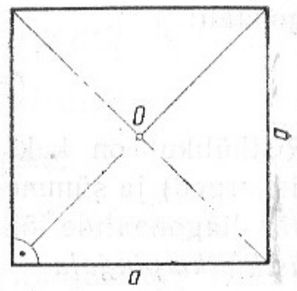
2. Rombi kõik küljed on võrdsed.
3. Rombi diagonaalid poolitavad nurki.
4. Rombi diagonaalid on risti.
5. Rombi diagonaalid on tema sümmeetriatelgedeks.

Rombi pindala

$$S=ah=\frac{1}{2}d_1d_2.$$



Joon. 10.96



Joon. 10.97

10.11. RUUT

Ruutu (joon. 10.94) võib defineerida kui
1) ristkülikut, mille lähisküljed on võrdsed;
2) rombi, mille üks nurk on täisnurk;
3) rööpkülikut, mille lähisküljed on võrdsed ja üks nurk on täisnurk.

O m a d u s i (joon. 10.97).

1. Ruudul on nii ristküliku (art. 10.9.) kui ka rombi (art. 10.10.) omadused.
2. Ruudu küljed on võrdsed.
3. Ruudu nurgad on täisnurgad.
4. Ruut on korrapärane nelinurk.
5. Ruudul on siseringjoon, mille keskpunktiks on diagonaalide lõikepunkt (O) ning raadiuseks pool külje pikkust $\left(r=\frac{1}{2}a\right)$.
6. Ruudul on ümberringjoon, mille keskpunktiks on diagonaalide lõikepunkt (O) ning raadiuseks pool diagonaali $\left(R=\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ruudu pindala

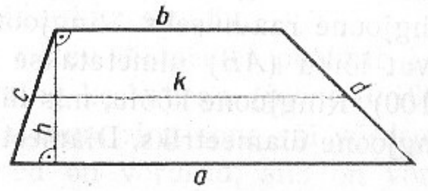
$$S=a^2.$$

10.12. TRAPETS

Def. **Trapetsiks** nimetatakse nelinurka, mille kaks vastaskülge on paralleelsed, kuid teised küljed ei ole paralleelsed (joon. 10.98).

Trapetsi paralleelseid vastaskülgi (a ja b) nimetatakse trapetsi **alusteks** ning mitteparalleelseid külgi **haaradeks** (c ja d).

Kui trapetsi haarad on võrdsed, nimetatakse trapetsit **võrdhaarseks.** Kui trapetsi üks haar on risti alustega, nimetatakse trapetsit **täisnurkseks.**



Jon. 10.98

Trapetsi haarade keskpunkte ühendavat lõiku (k) nimetatakse trapetsi **kesklõiguks.**

Trapetsi aluste vahelist kaugust (h) nimetatakse trapetsi **kõrguseks.**

Trapetsi kesklõik on paralleelne alustega ja võrdub aluste poolsummaga:

$$k=\frac{a+b}{2}$$

Võrdhaarse trapetsi o m a d u s i.

1. Võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

2. Võrdhaarse trapetsi vastasnurkade summa on 180°.
3. Võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.
4. Võrdhaarsel trapetsil on üks sümmeetriatelg — aluste keskristsirge.
5. Võrdhaarsel trapetsil on ümberringjoon, mille keskpunktiks on haarade keskristsirgete lõikepunkt.

Trapetsi pindala

$$S=\frac{a+b}{2}h=kh.$$

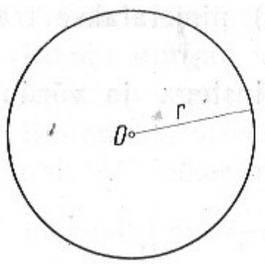
10.13. RINGJOON

10.13.1. Ringjoone mõiste

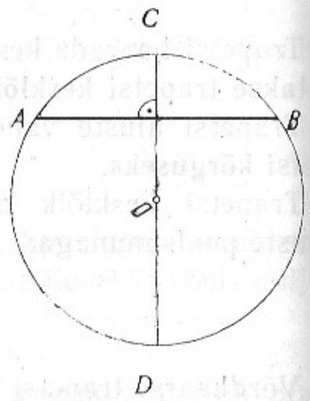
Def. **Ringjooneks** nimetatakse tasandi punktide hulka, mis asuvad võrdsel kaugusel (r) ühest kindlast punktist (O), mida nimetatakse ringjoone keskpunktiks (joon. 10.99).

Ringjoone punktide kaugust (r) ringjoone keskpunktist nimetatakse ringjoone **raadiuseks.** Ringjoone mingit kaht punkti ühendavat lõiku (AB) nimetatakse ringjoone **kõõluks** (joon. 10.100). Ringjoone kõõlu, mis läbib keskpunkti, nimetatakse ringjoone **diameetriks.** Diameetrit tähistatakse tähega d.

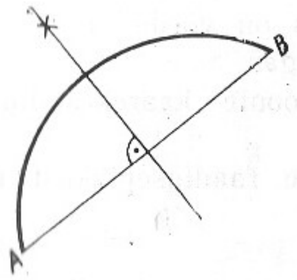
Ringjoon on sümmeetriline nii oma diameetri suhtes kui ka keskpunkti suhtes.



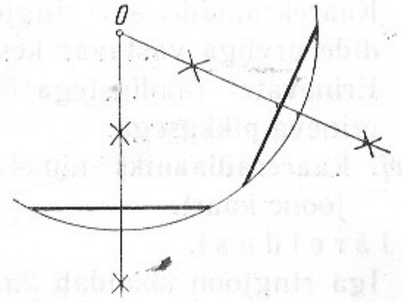
Joon. 10.99



Joon. 10.100



Joon. 10.101



Joon. 10.102

10.13.2. Ringjoone kaar.

Ringjoone kaareks nimetatakse ringjoone osa tema kahe punkti vahel. Kaart tähistatakse sümboliga $\smile AB$ ning kaarepikkust sümboliga $\widehat{AB}$. Sageli ei tehta vahet kaarel ja kaarepikkusel.

Kahte kaart nimetatakse võrdseks, kui nende raadiused on võrdsed ning kaarte üksteisele asetamisel kaarte otspunktid ühtivad.

Kaks ringjoont on võrdsed, kui nende raadiused on võrdsed.

Kaartega seotud l a u s e i d.

1. Kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja sellele vastava kaare ning kesknurga (joon. 10.100).

2. Kui ühe ja sama ringjoone või võrdsete raadiustega ringjoonte kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka neile vastavad kesknurgad ja kõõlud, kusjuures viimased on võrdsetel kaugustel ringjoone keskpunktist.

K o n s t r u k t s i o o n e. 1. Poolitada antud kaar. Selleks konstrueerime vastava kõõlu keskristsirge, mis poolitab ka kaare (joon. 10.101).

2. Konstrueerida antud kaarele vastava ringjoone keskpunkt. Selleks konstrueerime antud kaare kahe erineva kõõlu keskristsirged. Nende lõikepunkt (O) ongi ringjoone keskpunkt (joon. 10.102).

Def. **Kaarekraadiks** nimetatakse $\frac{1}{360}$ ringjoonest.

J ä r e l d u s i.

1. Iga ringjoon sisaldab 360 kaarekraadi.

2. Kaarekraadide arv ringjoones on võrdne nurgakraadide arvuga vastavas kesknurgas.
3. Erinevate raadiustega ringjoonte kaarekraadid on erineva pikkusega.

Def. **Kaareradiaaniks** nimetatakse raadiusepikkust ringjoone kaart.

J ä r e l d u s i.

1. Iga ringjoon sisaldab $2\pi \approx 6{,}2832$ kaareradiaani.
2. Erinevate raadiustega ringjoonte kaareradiaanide pikkused on erinevad.

Ringjoone k a a r e p i k k u s

$$l=\frac{\pi r n}{180}, \quad l=xr;$$

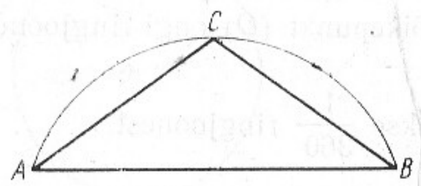
n on kaarekraadide arv kaares ja x kaareradiaanide arv kaares.

Ligikaudne valem (Huygensi valem) kaarepikkuse arvutamiseks (joon. 10.103):

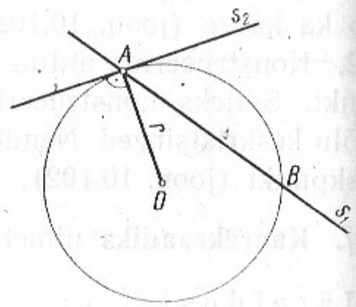
$$l \approx 2AC+\frac{1}{3}(2AC-AB),$$

kus $AC=CB$. Valemi suhteline viga on umbes 0,5%, kui kaar $\overset{\frown}{AB}$ on 60 kaarekraadi, ja väheneb kiiresti, kui kaarekraadide arv kaares väheneb.

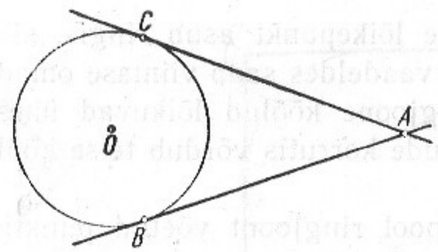
10.13.3. Ringjoone lõikaja ja puutuja. Ringjoone **lõikajaks** nimetatakse sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti (joon. 10.104 sirge s_1). Lõikaja piirsirget,



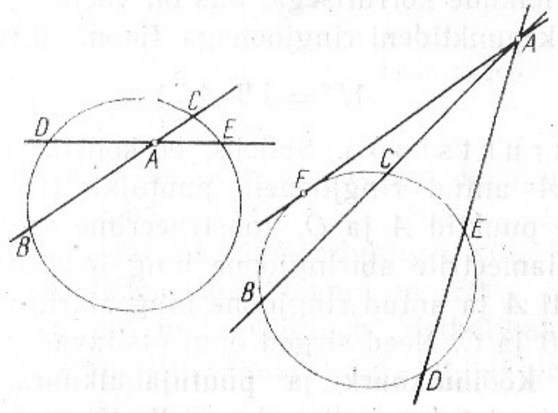
Joon. 10.103



Joon, 10.104



Joon. 10.105



Joon. 10.106

millele läheneb lõikaja, kui üht lõikepunkti mööda ringjoone kaart teisele lähendada, nimetatakse ringjoone **puutujaks.** Seega ringjoone puutujaks nimetatakse sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt (joon. 10.104 sirge s_2). Ringjoone ja puutuja ühist punkti nimetatakse **puutepunktiks** (A).

Lõikaja ja puutuja o m a d u s i.

1. Ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega (joon. 10.104).
2. Ringjoone puutujate lõikepunkt on puutepunktidest võrdsel kaugusel (joon. 10.105 $AB=AC$).
3. Lõikajate nende osade korrutised, mis on võetud lõikajate ühisest punktist lõikepunktideni ringjoonega, on võrdsed (joon. 10.106):

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

Kui lõikajate lõikepunkt asub ringis, siis lõike BC ja DE kõõludena vaadeldes saab viimase omaduse sõnastada kujul: kui ringjoone kõõlud lõikuvad ühes punktis, siis ühe kõõlu lõikude korrutis võrdub teise kõõlu lõikude korrutisega.

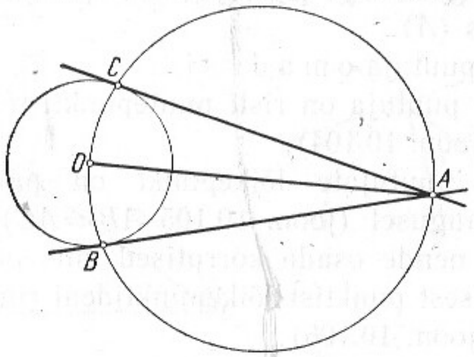
4. Kui väljaspool ringjoont võetud punktist on ringjoonele tõmmatud lõikaja ja puutuja, siis puutuja lõigu ruut antud punktist puutepunktini on võrdne lõikaja nende lõikude korrutisega, mis on võetud antud punktist lõikepunktideni ringjoonega (joon. 10.106):

$$AF^2 = AB \cdot AC.$$

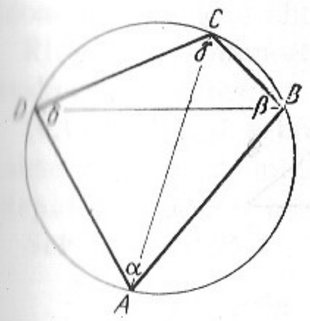
K o n s t r u k t s i o o n. Selleks, et konstrueerida antud punktist A antud ringjoonele puutujat (joon. 10.107), ühendame punktid A ja O, konstrueerime saadud lõigule QA kui diameetrile abiringjoone ning joonestame sirged läbi punkti A ja antud ringjoone ning abiringjoone lõikepunktide B ja C. Need sirged ongi otsitavad puutujad.

10.13.4. Kõõlhulknurk ja puutujahulknurk. Kõõlhulknurgaks nimetatakse hulknurka, mille tipud asuvad ringjoonel. Ringjoon on kõnealuse hulknurga suhtes ümberringjoon. Kõõlhulknurga küljed on ümberringjoone kõõludeks (joon. 10.108).

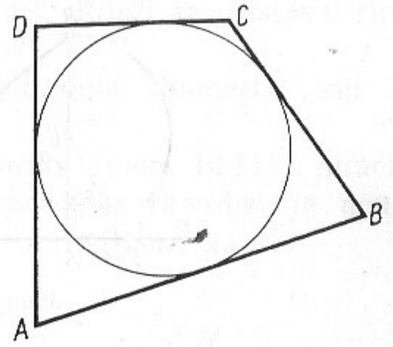
Puutujahulknurgaks nimetatakse hulknurka, mille kõik küljed on ringjoone puutujad. Ringjoon on puutujahulknurgale siseringjooneks (joon. 10.109).



Joon. 10.107



Joon. 10.108



Joon. 10.109

Igal korrapärasel hulknurgal ja igal kolmnurgal on sise- ja ümberringjoon.

Kumeral nelinurgal on ümberringjoon siis ja ainult siis, kui tema vastasnurkade summa on 180°.

J ä r e l i k u l t on ümberringjoon ristkülikul, ruudul ja võrdhaarsel trapetsil, ümberringjoont ei ole näiteks rööpkülikul ja rombil.

Kõõl- ja puutujanelinurga o m a d u s i.

1. Kõõlnelinurga vastasnurkade summa on 180° ($\alpha+\gamma = \delta+\beta$, joon. 10.108).
2. Ptolemaiose ***teoreem*:** kõõlnelinurga diagonaalide korrutis võrdub vastaskülgede korrutiste summaga (joon. 10.108):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

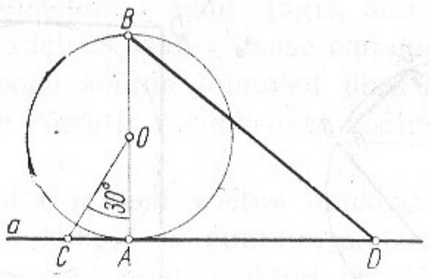
3. Puutujanelinurga vastaskülgede summad on võrdsed (joon. 10.109):

$$AB + CD = AD + BC.$$

10.13.5. Ringjoone pikkus. Arv π

Def. **Ringjoone pikkuseks** nimetatakse ringjoone sisse joonestatud korrapäraste kõõlhulknurkade ümbermõõtude jada piirväärtust, kui hulknurga külgede arv tõkestamatult kasvab:

$$c = \lim_{n\to\infty} u_n,$$



Joon. 10.110

kus c tähistab ringjoone ümbermõõtu ja u_n korrapärase (kõõl) n-nurga ümbermõõtu.

Analoogiliselt saab defineerida ringjoone pikkust korrapäraste puutujahulknurkade ümbermõõtude kaudu.

Ringjoone pikkus

$$c=2\pi r=\pi d,$$

kus tähega π on tähistatud teatav irratsionaalarv, mille mõned kohad on järgmised:

$\pi=3{,}14159265358979323846264338327950288419 71\ldots$.

Praktilisteks arvutusteks piisab, kui võtta $\pi\approx3{,}14$ või veidi ebatäpsemalt $\pi\approx3\frac{1}{7}$.

10.13.6. Ringjoone sirgestamine. Ringjoone sirgestamise all mõeldakse antud ringjoone pikkuse sirglõigu konstrueerimist. XIX sajandil tõestati, et sirkli ja joonlauaga on seda põhimõtteliselt võimatu teha. Joonisel 10.110 on kujutatud poole ringjoone ligikaudne sirgestamine. Eeldades konstrueerimisvigade puudumist, saame, et $BD=3{,}14153r\approx0{,}5\cdot c$, kus c on ringjoone ümbermõõt. Konstrueerimine: diameeter AB; $a\perp AB$; $\angle AOC=30°$; $CD=3r$; BD.

10.14. RING

10.14.1. Ringi mõiste

Def. **Ringiks** raadiusega r nimetatakse tasandi punktide hulka, mille kaugus ühest kindlast punktist (O), mida nimetatakse ringi keskpunktiks, on mitte suurem kui r.

Ringi piirab ringjoon. Ringi raadiuseks nimetatakse teda piirava ringjoone raadiust. Ringi ja vastava ringjoone keskpunktid ühtivad.

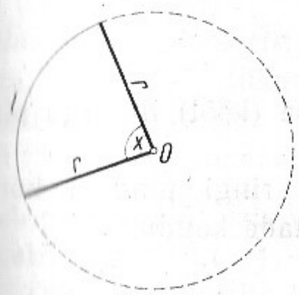
Ring on sümmeetriline nii oma diameetri kui ka keskpunkti suhtes.

10.14.2. Ringi sektor. Sektoriks (joon. 10.111) nimetatakse ringi osa, mida piiravad kaks raadiust ja nende otspunktide vahel asuv vastava ringjoone kaar.

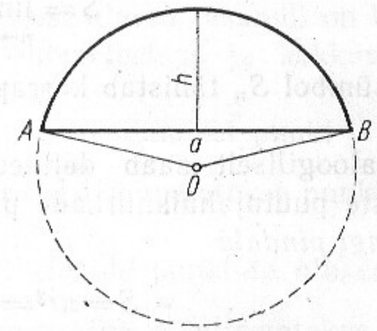
Sektori pindala

$$S=\frac{\pi r^2 n}{360},\quad S=\frac{xr^2}{2},\quad S=\frac{lr}{2},$$

n on sektori nurga kraadide arv, x on nurk radiaanides ja l sektori kaarepikkus.



Joon. 10.111



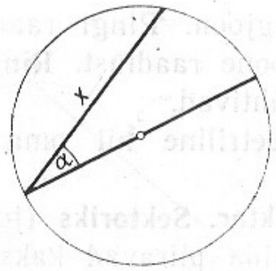
Joon. 10.112

10.14.3. Segment. Segmendiks (joon. 10.112) nimetatakse ringi osa, mida piirab kõõl ja selle otspunkte ühendav kaar. Pindala leidmiseks lahutatakse vastava sektori pindalast kolmnurga (ABO) pindala. Ligikaudne valem pindala arvutamiseks:

$$S=\frac{2}{3}ah,$$

kus a on kõõlu pikkus ja h on kõõlu kaugus kaare keskpunktist (segmendi kõrgus).

Kui $\overset{\frown}{AB}=45°$, on suhteline viga 0,75% ning väheneb koos kaarekraadide arvu vähenemisega.



Joon. 10.113

10.14.4. Ringi pindala

Def. **Ringi pindalaks** nimetatakse ringi kujundatud korrapäraste kõõlhulknurkade pindalade jada piirväärtust, kui hulknurga külgede arv tõkestamatult kasvab:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

kus sümbol S_n tähistab korrapärase (kõõl) n-nurga pindala.

Analoogiliselt saab defineerida ringi pindala korrapäraste puutujahulknurkade pindalade kaudu.

Ringi pindala

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

10.14.5. Ringi ruutimine. Ringi ruutimiseks nimetatakse antud ringiga pindvõrdse ruudu konstrueerimist. XIX sajandil tõestati, et seda on põhimõtteliselt võimatu sirkli ja joonlauaga teha (konstrueerimise ebatäpsusi arvestamata). Ülesande ligikaudseks lahendamiseks joonestatakse ringi diameetriga nurga $\alpha = 27°36'$ all kõõl x, mis ongi otsitava ruudu külg (joon. 10.113).

10.15. TEISENDUSED

10.15.1. Teisendus tasandil. Kui on antud ühese vastavuse eeskiri, mille kohaselt saame tuletada vaadeldavast punktihulgast tasandil uue punktihulga samal tasandil, siis öeldakse, et on antud **geomeetriline teisendus** tasandil. See eeskiri (teisenduseeskiri) võib olla antud sõnalise juhisena, valemina või geomeetrilise konstruktsioonina. Antud punktihulka nimetatakse **originaaliks** ja sellest tuletatud punktihulka **teisendiks** ehk **kujutiseks**. Tasapinna teisendamisel iseendaks on võimalik, et mõni punkt (joon) ühtib oma teisendiga. Selliseid punkte (jooni) nimetatakse vaadeldava **teisenduse püsipunktideks (-joonteks)**.

Geomeetriline teisendus on seega kujutus, kus originaalideks ja kujutisteks on sama tasandi punktihulgad.

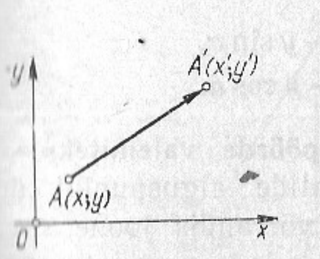
Et tasandi punkte iseloomustavad koordinaatide paarid, siis geomeetriline teisendus on määratud koordinaatide teisendusega.

Olulisemad geomeetrilised teisendused tasandil on lüke, pööre, peegeldus, liikumine, homoteetsus ja kokkusurumine (väljavenitus).

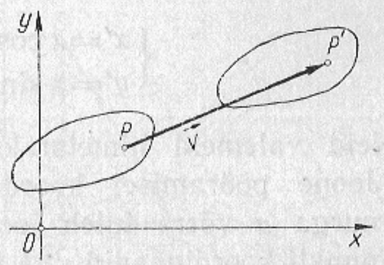
10.15.2. Lüke tasandil. Kui teisendamisel punkt A teiseneb punktiks A', siis vektorit $\overrightarrow{AA'}$ nimetatakse punkti A' nihkeks (joon. 10.114).

Def. Teisendust, mille korral kõikide punktide nihked on võrdsed ühe ja sama vektoriga $\vec{v}$, nimetatakse **lükkeks** $\vec{v}$ (joon. 10.115).

Vektorist $\vec{v}$ kõneldakse sel juhul kui vaadeldava **lükke vektorist.**



Joon. 10.114



Joon. 10.115

Omadusi.

1. Lükke $\vec{v}=(v_1; v_2)$ korral avalduvad punkti $P(x; y)$ kujutise koordinaadid valemitega

$$\begin{cases} x'=x+v_1, \\ y'=y+v_2. \end{cases}$$

Neid valemeid nimetatakse **lükke valemiteks.**

2. Joone teisendamisel lükkega $\vec{v}=(v_1; v_2)$, tuleb joone võrrandis muutujatest x ja y lahutada vektori $\vec{v}$ vastavad koordinaadid.

Näide. Olgu antud lüke $\vec{v}=(2; -3)$. Sel juhul punkt A $(-5; 3)$ teisendub punktiks $A'(-5+2; 3-3)=(-3; 0)$ ning ringjoon $x^2+y^2=1$ teiseneb ringjooneks võrrandiga

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1.$$

10.15.3. Pööre tasandil

Def. Tasandi teisendust nimetatakse **pöördeks** mingi punkti C ümber nurga α võrra, kui iga punkti A korral on vektorite $\vec{CA}$ ja $\vec{CA'}$ pikkused võrdsed ning nurk vektorist $\vec{CA}$ vektorini $\vec{CA'}$ on α.

Punkti C nimetatakse **pöördekeskpunktiks** ning nurka α **pöördenurgaks** (joon. 10.116).

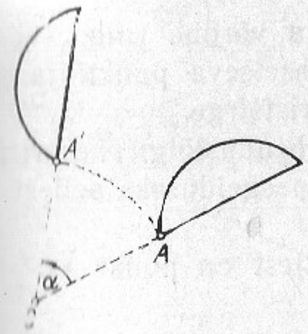
Omadusi.

1. Tasandi pööramisel koordinaatide alguspunkti ümber nurga α võrra avalduvad punkti $P(x; y)$ kujutise koordinaadid valemitega

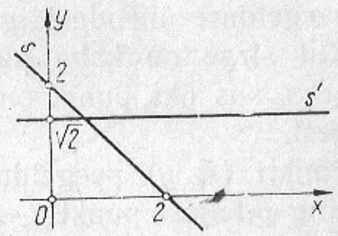
$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases}$$

Neid valemeid nimetatakse **pöörde valemiteks.**

2. Joone pööramisel koordinaatide alguspunkti ümber nurga α võrra tuleb joone võrrandis joone suvalise punkti koordinaadid x ja y asendada vastavalt avaldistega $x\cos\alpha+y\sin\alpha$ ja $-x\sin\alpha+y\cos\alpha$.



Joon. 10.116



Joon. 10.117

Näide. Olgu antud sirge s võrrandiga $x+y=2$ (joon. 10.117). Pöörame seda sirget nurga $\alpha=45°$ võrra. Leiame selle sirge teisendi s' võrrandi:

$$(x\cos 45°+y\sin 45°)+(-x\sin 45°+y\cos 45°)=2,$$

$$x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}-x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}=2, \quad 2y\frac{\sqrt{2}}{2}=2, \quad y=\sqrt{2}.$$

10.15.4. Peegeldus tasandil

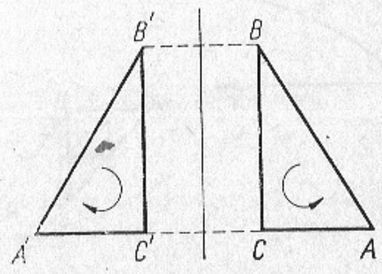
Def. Tasandi teisendust, mis kujutab iga punkti A temaga antud sirge suhtes sümmeetriliseks punktiks A', nimetatakse **peegelduseks antud sirgest.**

Vaadeldavat sirget nimetatakse **peegeldusteljeks.**

Tasandi peegeldus sirgest on saadav tasandi pööramisega ümber sirge 180° võrra.

Omadusi.

1. Lõigu peegelduseks on selle lõiguga võrdne lõik.
2. Hulknurga peegelduseks on sellega võrdne hulknurk (joon. 10.118).



Joon. 10.118

3. Ringi peegelduseks on sellega võrdne ring.
4. Peegeldustelg on teljel mitteasetseva punkti ja selle peegelduse ühenduslõigu keskristsirge.
5. Kui sirge on kahe punkti ühenduslõigu keskristsirgeks, siis üks punkt on teise peegelduseks sellest sirgest.
6. Punkti $(x; y)$ peegeldus x-teljest on punkt $(x; -y)$ ning y-teljest punkt $(-x; y)$.
7. Joone peegeldamisel sirgest $y=x$ saame joone, mille võrrandiks on originaali võrrand, kui selles vahetada muutujate x ja y kohad.

Näide. Joone $y=\log x$ peegelduseks sirgest $y=x$ on joon $x=\log y$ ehk $y=10^x$ (joon. 10.119).

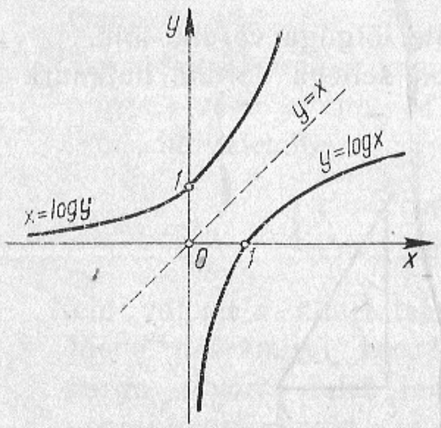
8. Peegeldusel sirgest muutub kujundi orientatsioon (rajajoone punktide järjestus) vastupidiseks (joon. 10.118).

Def. Teisendust nimetatakse **peegelduseks punktist** C, kui iga vaadeldav punkt ja tema teisend on punkti C suhtes sümmeetrilised (joon. 10.120).

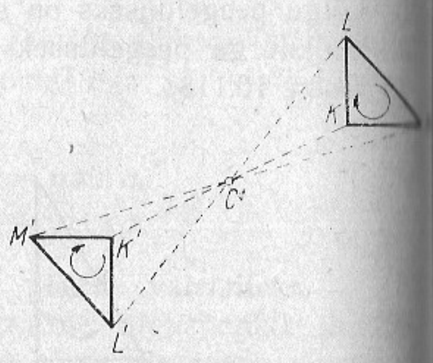
Punkti C nimetatakse **peegelduskeskpunktiks.**

Omadusi.

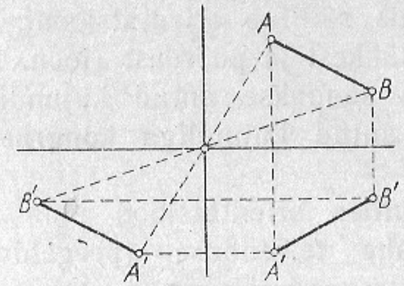
1. Peegeldusel punktist säilib orientatsioon (joon. 10.120).
2. Peegeldusel koordinaatide alguspunktist muutuvad



Joon. 10.119



Joon. 10.120



Joon. 10.121

punkti $(x; y)$ koordinaatide märgid vastupidiseks, s. t. teisendiks on punkt $(-x; -y)$.

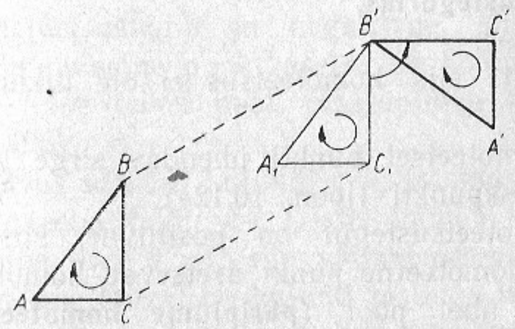
3. Kui peegeldusteljed on teineteisega risti, siis kahest järjestikusest peegeldusest koosnev teisendus on peegeldus nende telgede lõikepunktist (joon. 10.121).
4. Peegeldus telgede lõikepunktist on vaadeldav pöördena 180° võrra ümber selle punkti.

10.15.5. Liikumine tasandil

Def. **Liikumiseks tasandil** nimetatakse niisugust tasandi teisendust, mille korral iga kahe originaalpunkti vaheline kaugus võrdub nende teisendite vahelise kaugusega.

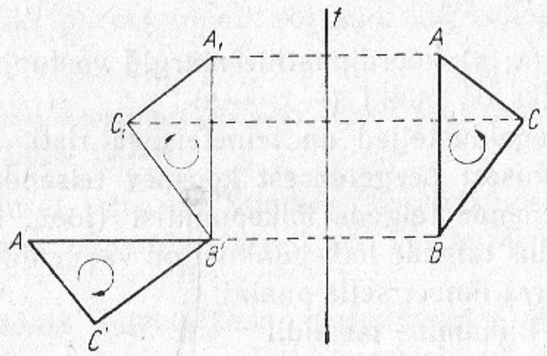
Omadusi.

1. Lüke, pööre, peegeldus sirgest ja peegeldus punktist on liikumised.
2. Liikumine, mis koosneb lükkest ja pöördest, säilitab orientatsiooni.



Joon. 10.122

3. Liikumist, mis säilitab orientatsiooni, saab vaadelda koosnevana lükkest ja pöördest (joon. 10.122).
4. Kujund, mis saadakse antud kujundist selle liikumisel, on antud kujundiga **kongruentne (võrdne)** kujund.
5. Liikumist, milles orientatsioon pole säilinud, saab vaadelda kahe teisenduse (peegeldus sirgest ja pööre) järjestrakendamisena.



Joon. 10.123

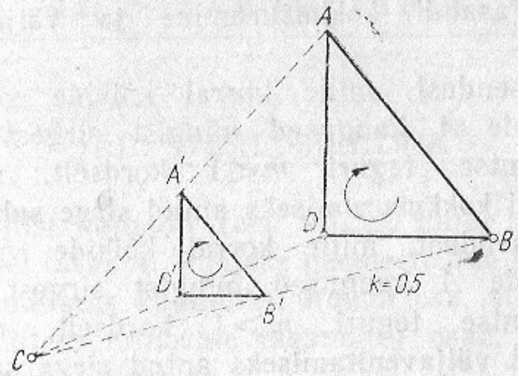
10.15.6. Homoteetsus

Def. Tasandi teisendust nimetatakse **homoteetsuseks** punkti C suhtes, kui iga vaadeldava punkti A ja tema teisendi A' korral kehtib seos $\overrightarrow{CA'}=k\ \overrightarrow{CA}$, kus k on mingi fikseeritud reaalarv.

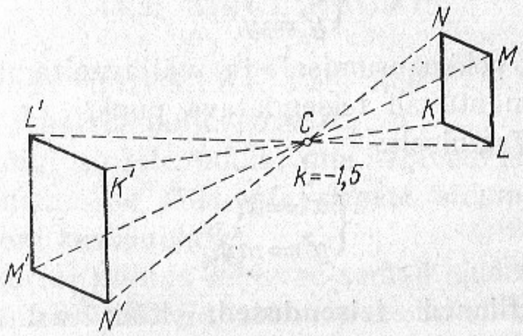
Punkti C nimetatakse **homoteetsuskeskpunktiks** ja arvu k **homoteetsusteguriks.**

Omadusi.

1. Kui $k\neq 1$, siis homoteetsus ei ole liikumine (joon. 10.124).
2. Kaht homoteetset punkti ühendav sirge läbib homoteetsuskeskpunkti (joon. 10.124).
3. Kui homoteetsustegur on positiivne, siis punkt ja temaga homoteetne punkt asetsevad homoteetsuskeskpunktist ühel pool **(päripidine homoteetsus,** joon. 10.124).



Joon. 10.124



Joon. 10.125

4. Kui homoteetsustegur on negatiivne, siis punkt ja temaga homoteetne punkt asetsevad homoteetsuskeskpunktist teine teisel pool **(vastupidine homoteetsus,** joon. 10.125).
5. Homoteetsus säilitab kujundi orientatsiooni.
6. Kui homoteetsustegur $k<1$, siis toimub kujundi **kokkusurumine,** kui $k>1$, siis **väljavenitamine.**
7. Homoteetsuse korral on kujund ja tema teisend teineteisega sarnased, kusjuures homoteetsusteguri absoluutväärtus $|k|$ on **sarnasusteguriks.**

10.15.7. Tasandi kokkusurumine ja väljavenitamine sirge suhtes

Def. 1. Teisendust, mille korral kõikide vaadeldavate punktide A kaugused mingist sirgest muutuvad konstantse teguri $m<1$ kordselt, nimetatakse tasandi **kokkusurumiseks** antud **sirge suhtes**.

Def. 2. Teisendust, mille korral kõikide vaadeldavate punktide A kaugused mingist sirgest muutuvad konstantse teguri $m>1$ kordselt, nimetatakse tasandi **väljavenitamiseks** antud **sirge suhtes**.

Omadusi.

1. Tasandi kokkusurumisel ja väljavenitamisel y-telje suhtes muutuvad teisendatava punkti $(x; y)$ koordinaadid järgmiselt:

$$\begin{cases} x'=mx, \\ y'=y. \end{cases}$$

2. Tasandi kokkusurumisel ja väljavenitamisel x-telje suhtes muutuvad teisendatava punkti $(x; y)$ koordinaadid järgmiselt:

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=my. \end{cases}$$

10.15.8. Afiinsed teisendused. Kõik art. 10.15.2.–10.15.7. vaadeldud teisendused kujutavad endast erijuhte üldisest teisendusest, mille valemid avalduvad kujul

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1, \\ y'=a_2x+b_2y+c_2, \end{cases} \qquad (1)$$

kus a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 on mingid konstandid.

Valemitega (1) määratud teisendusi nimetatakse **afiinseteks teisendusteks.**

Afiinse teisenduse omadusi.

1. Sirge teiseneb sirgeks.
2. Paralleelsed sirged teisenevad paralleelseteks sirgeteks.
3. Sirge kahe lõigu suhe teisendamisel ei muutu.

11. STEREOMEETRIA

11.1. STEREOMEETRIA

Geomeetrilist kujundit (art. 9.1.2.), mille kõik punktid ei asetse ühel tasandil (näiteks geomeetriline keha), nimetatakse **ruumiliseks kujundiks.** Ruumi osa, mida piiravad pindade (näiteks erinevate tasandite) osad, nimetatakse **geomeetriliseks kehaks.**

Geomeetria osa, mis uurib kõiki ruumis olevaid kujundeid, nimetatakse **stereomeetriaks** (kr. *stereos* — ruumiline, kr. *metreō* — mõõdan) ehk **ruumigeomeetriaks.**

11.2. SIRGE RUUMIS

11.2.1. Sirge (art. 9.1.3.). Läbi ühe punkti saab ruumis panna lõpmata palju sirgeid.

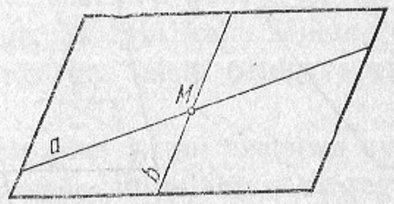
Ruumi kõigi sirgete hulka, mis läbivad ühte ja sama punkti, nimetatakse **lõikuvate sirgete sidumiks** ja seda punkti **sidumi keskpunktiks.**

Sirgete korral ruumis kehtivad samad laused ning kasutatakse samu sümboleid, mis on esitatud artiklis 10.2.

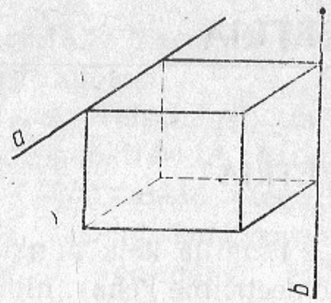
Arvult n punkti, millest ükski kolm ei asetse ühel sirgel, määravad $0{,}5n(n-1)$ sirget.

11.2.2. Kahe sirge vastastikused asendid ruumis

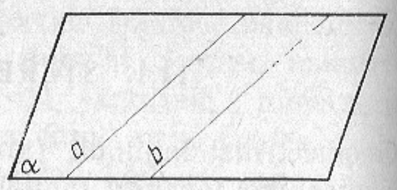
1. Kaks sirget lõikuvad, kui neil on vaid üks ühine punkt (joon. 11.1).



Joon. 11.1



Joon. 11.2



Joon. 11.3

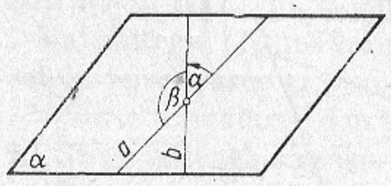
2. Kaks sirget on paralleelsed, kui neil ühised punktid puuduvad (kui nende ühisosa on tühi hulk) või kui sirged ühtivad.

3. Kaks sirget on kiivsirged (joon. 11.2), kui neist ei saa läbi panna tasandit.

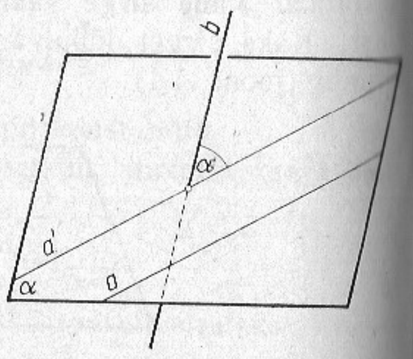
Läbi kahe lõikuva (joon. 11.1) või paralleelse sirge (joon. 11.3) saab alati panna ühe tasandi. Sirgeid, mis asetsevad ühel tasandil, nimetatakse **komplanaarseteks**. Sirgeid, mis ei asetse ühel tasandil, nimetatakse mittekomplanaarseteks.

Kui sirge a asetseb tasandil α (tasand α läbib sirget a), siis kirjutatakse: $a \subset \alpha$ või $\alpha \supset a$.

Kahe **lõikuva sirge vaheliseks nurgaks** nimetatakse nurka (tavaliselt väiksemat nurka), mille võrra tuleb sirgetega määratud tasandil pöörata üht sirget, et see ühtiks teise sirgega (joon. 11.4).



Joon. 11.4



Joon. 11.5

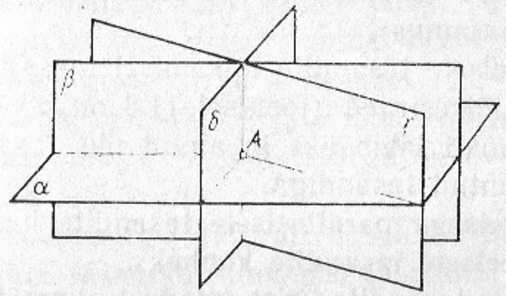
Kiivsirgete vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka ühe antud sirge ja niisuguse temaga lõikuva sirge vahel, mis on paralleelne teisega antud sirgetest (joonisel 11.5 on sirgete a ja b vaheliseks nurgaks nurk α).

L ü h e m a l t: kahe sirge vaheliseks nurgaks nimetatakse nende sihivektorite vahelist nurka.

11.3. TASAND

11.3.1. Tasand (vt. art. 9.1.4.). Läbi ühe punkti saab ruumis panna lõpmata palju tasandeid (joon. 11.6).

Ruumi kõigi tasandite hulka, mis läbivad üht ja sama punkti, nimetatakse **tasandite sidumiks** ja kõnealust punkti **sidumi keskpunktiks.**



Joon. 11.6

Lauseid «punkt A asetseb tasandil α» ja «tasand α läbib punkti A» kirjutatakse s ü m b o l e i s $A \in \alpha$.

Ühe ja ainult ühe tasandi saab panna 1) läbi kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti, 2) läbi punkti ja seda mitteläbiva sirge, 3) läbi kahe lõikuva sirge ja 4) läbi kahe paralleelse sirge. Teisiti öeldakse, et *tasand on määratud*

1) kolme mitte ühel sirgel asetseva punktiga,
2) punkti ja seda mitteläbiva sirgega,
3) kahe lõikuva sirgega,
4) kahe paralleelse sirgega.

Kui kahel tasandil on kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel, siis need *tasandid ühtivad.*

Lauset «tasandid α ja β ühtivad» kirjutatakse sümboleis $\alpha = \beta$.

11.3.2. Tasandite vastastikused asendid. Kaks tasandit kas on paralleelsed või lõikuvad.

Kahte tasandit nimetatakse **paralleelseteks,** kui neil ei ole ühiseid punkte (kui nende ühisosa on tühi hulk) või kui tasandid ühtivad. Tasandite α ja β paralleelsust tähistatakse sümboleis $\alpha \parallel \beta$.

L a u s e i d paralleelsete tasandite kohta.

1. Kui ühe tasandi kaks lõikuvat sirget on paralleelsed teise tasandiga, siis need tasandid on paralleelsed.

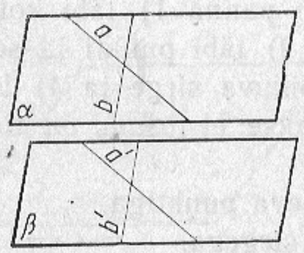
2. Kui ühe tasandi kaks lõikuvat sirget on vastavalt paralleelsed teise tasandi kahe lõikuva sirgega (joon. 11.7), siis need tasandid on paralleelsed (kahe tasandi paralleelsuse tunnus).

3. Paralleelsete tasandite lõikamisel tasandiga tekivad paralleelsed lõikesirged (joonisel 11.8 on $a \parallel b$).

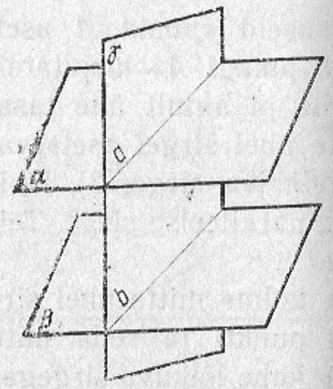
4. Igat punkti läbib üks ja ainult üks tasand, mis on paralleelne antud tasandiga.

Kõigi üksteisega paralleelsete tasandite hulka nimetatakse **paralleelsete tasandite kimbuks.**

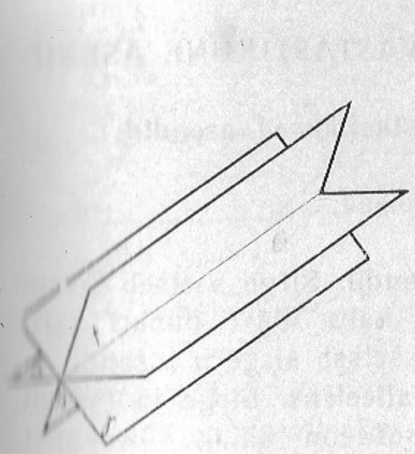
Paralleelsete tasandite ühist omadust nimetatakse **rihiks.** Seega on paralleelsed tasandid samarihilised.



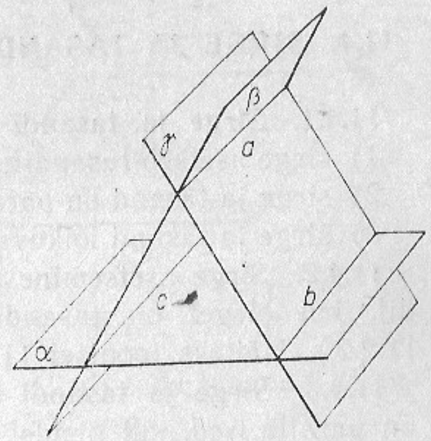
Joon. 11.7



Joon. 11.8



Joon. 11.9



Joon. 11.10

Kaht erinevat tasandit nimetatakse l õ i k u v a t e k s, kui neil on vähemalt üks ühine punkt. Kahe lõikuva tasandi ühisosaks on sirge, mida nimetatakse nende tasandite lõikesirgeks. Sirge a joonisel 11.8 on tasandite α ja γ lõikesirge, tasandite β ja γ lõikesirgeks on sirge b.

Lauset «tasandite α ja β lõikesirge on a» kirjutatakse s ü m b o l e i s $\alpha \cap \beta = a$.

Ühte ja sama sirget läbivate tasandite hulka nimetatakse **lõikuvate tasandite kimbuks,** tasandite ühist sirget aga **kimbu teljeks** (joon. 11.9).

Kahe tasandi vahelisest nurgast vt. art. 11.6.3.

K o l m e t a s a n d i vastastikuseid asendeid uuritakse nende tasandite lõikesirgete arvu seisukohalt.

1. Tasandid, millel ei ole ühtki lõikesirget, on paralleelsed. Need kuuluvad paralleelsete tasandite kimpu.

2. Tasandid, millel on üks lõikesirge, kuuluvad lõikuvate tasandite kimpu (joon. 11.9).

3. Tasanditest, millel on kaks lõikesirget, on kaks paralleelsed ning kolmas lõikab neid (joon. 11.8).

4. Tasanditel on kolm lõikesirget. Sellisel juhul need kas lõikuvad ühes punktis (tasandid kuuluvad ühte tasandite sidumisse; joon. 11.6, näiteks tasandid α, γ, δ) või on paralleelsed (joon. 10.10).

11.4. SIRGE JA TASANDI VASTASTIKUNE ASEND

11.4.1. Sirge ja tasandi vastastikused asendid:
1) sirge asetseb tasandil;
2) sirge ja tasand on paralleelsed;
3) sirge ja tasand lõikuvad.

11.4.2. Sirge asetsemine tasandil. Sirge asetseb tasandil, kui sirgel on tasandiga kaks ühist punkti (art. 11.2.2.). Näiteks joonisel 11.7 asetseb sirge a tasandil α.

11.4.3. Sirge ja tasandi paralleelsus. Sirge ja tasand on paralleelsed, kui nende ühisosa on tühi, s. o. kui neil ei ole ühtki ühist punkti.

Lauseid sirge ja tasandi paralleelsuse kohta.

1. Kui väljaspool tasandit asetsev sirge on paralleelne tasandil asetseva sirgega, siis on ta paralleelne ka selle tasandiga.

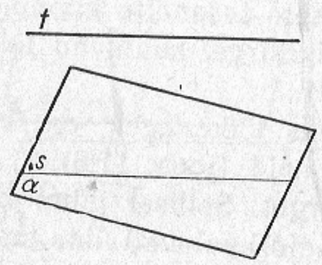
Joonisel 11.11. on $t \parallel s$, seega ka $t \parallel \alpha$.

2. Tasandist väljaspool asetsevat punkti läbib lõpmata palju sirgeid, mis on paralleelsed selle tasandiga.

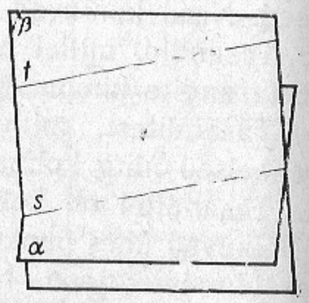
3. Kui ühel kahest lõikuvast tasandist asetsev sirge on paralleelne teise tasandiga, siis on ta paralleelne nende tasandite lõikesirgega.

Joonisel 11.12 on $t \parallel \alpha$; seega ka $t \parallel s$.

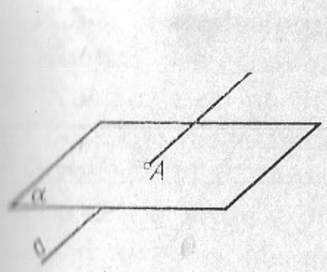
11.4.4. Sirge ja tasandi lõikumine. Sirge ja tasand lõikuvad, kui nende ühisosa koosneb ühest punktist. Sirge ja tasandi ainsat ühist punkti nimetatakse nende **lõikepunktiks** või ka sirge **aluspunktiks** tasandil (joon. 11.13).



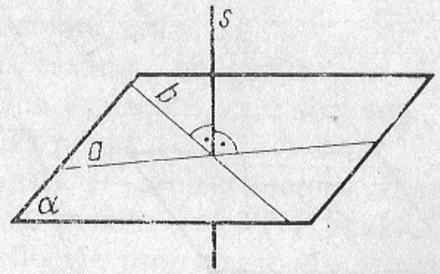
Joon. 11.11



Joon. 11.12



Joon. 11.13



Joon. 11.14

Kui sirge lõikab tasandit, siis lõikab seda tasandit ka iga sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Sirge ja tasandi lõikumise erijuhuks on nende ristumine. Sirget ja tasandit nimetatakse **ristuvateks,** kui sirge on risti selle tasandi iga sirgega.

Lauset «sirge a on risti tasandiga α» kirjutatakse sümboleis $a \perp \alpha$.

Sirge ja tasandi *ristumise tunnus*: kui sirge on risti tasandi mingite kahe lõikuva sirgega, siis on ta risti ka selle tasandiga (joon. 11.14).

Sirget, mis on risti tasandiga, nimetatakse tasandi normaaliks. Igat punkti läbib ainult üks antud **tasandi normaal.**

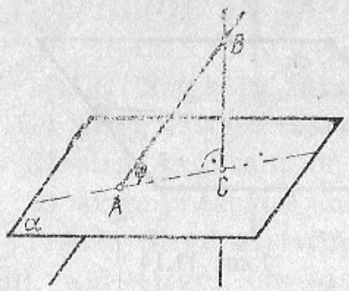
Sirget, mis ei ole risti tasandiga, kuid lõikab tasandit, nimetatakse **tasandi kaldsirgeks**.

Sirget, mis läbib kaldsirge mingist väljaspool tasandit asuvast punktist tasandile tõmmatud ristsirge aluspunkti ja kaldsirge enda aluspunkti, nimetatakse **kaldsirge projektsiooniks** tasandil. Joonisel 11.15 on sirge AC tasandi α kaldsirge AB projektsiooniks (sirge $BC \perp \alpha$).

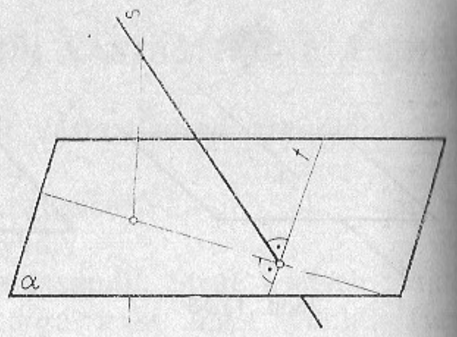
Nurgaks kaldsirge ja tasandi vahel ehk sirge kaldenurgaks tasandi suhtes nimetatakse teravnurka kaldsirge ja tema projektsiooni vahel tasandil (joonisel 11.15 nurk φ).

Lauseid sirge ja tasandi vastastikuste asendite kohta.

1. ***Kolme ristsirge teoreem:*** tasandi kaldsirge (s) on risti tasandil (α) asetseva sirgega (t) siis ja ainult siis,



Joon. 11.15



Joon. 11.16

kui kaldsirge (s) projektsioon tasandil (α) on risti tasandil asetseva sirgega (t) (joon. 11.16).

2. Kui üks kahest paralleelsest sirgest on risti mingi tasandiga, siis on ka teine sirge risti selle tasandiga.

3. Kaks ühe ja sama tasandiga ristuvat sirget on paralleelsed.

4. Kaks ühe ja sama sirgega ristuvat tasandit on paralleelsed.

11.5. PARALLEELPROJEKTSIOON

11.5.1. Paralleelprojektsiooni mõiste. Ruumis asetseva objekti kujutamiseks tasandil α pannakse läbi objekti kõigi punktide paralleelsed sirged ning leitakse nende sirgete ja tasandi α lõikepunktid. Viimased moodustavad punktihulga (kujundi) tasandil α, mida loetaksegi objekti **paralleelprojektsiooniks** tasandil α. Objekti paralleelprojektsiooni leidmist nimetatakse paralleelprojekteerimiseks ehk projekteerimiseks antud sihis. Projekteeritakse paralleelsete sirgetega (projekteerivate sirgete ehk kujutamissirgetega), mille kalle tasandi suhtes määrab sihi. Tasandit, millele projekteeritakse ruumi objekt, nimetatakse ekraaniks ehk projektsioonitasandiks.

Kui projekteerivad sirged on risti ekraaniga, nimetatakse paralleelprojektsiooni **ristprojektsiooniks,** vastasel juhul **kaldprojektsiooniks.**

11.5.2. Paralleelprojektsiooni omadusi

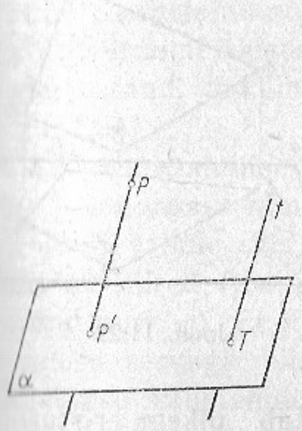
1. Punkti projektsiooniks tasandil on punkt.
2. Kui sirge on paralleelne projekteerivate sirgetega, siis on sirge projektsiooniks punkt.

Joonisel 11.17 on punkti P projektsiooniks tasandil punkt P' ja sirge t projektsiooniks ($t \parallel PP'$) punkt T.

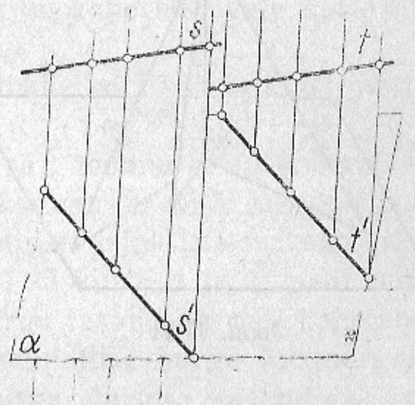
3. Kui sirge ei ole paralleelne projekteerivate sirgetega, on sirge projektsiooniks sirge.

Joonisel 11.18 on sirge s projektsiooniks sirge s' ja sirge t projektsiooniks sirge t'.

4. Paralleelsete sirgete projektsioonid on paralleelsed (joonisel 11.18 on $s \parallel t$ ja $s' \parallel t'$).

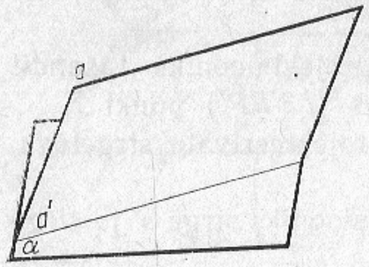


Joon. 11.17

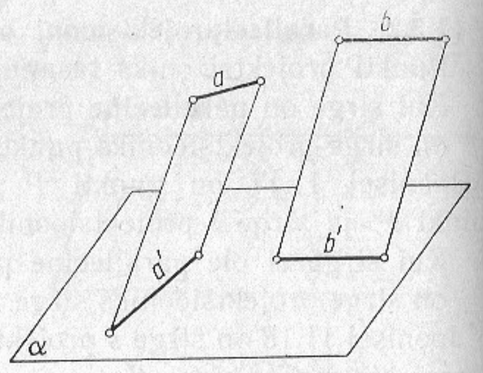


Joon. 11.18

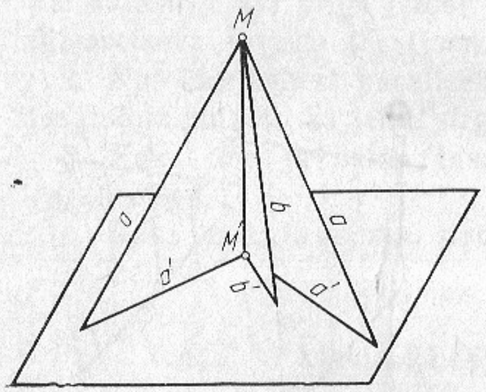
5. Ekraaniga paralleelse sirge projektsiooniks on projekteeritava sirgega paralleelne sirge.
Joonisel 11.19 on $a \parallel \alpha$, seega ka $a \parallel a'$.
6. Kui lõik ei asetse projekteerival sirgel, siis lõigu projektsiooniks on lõik (joonis 11.20).
7. Ekraaniga paralleelse lõigu projektsiooniks on projekteeritava lõiguga võrdne lõik (joonisel 11.20 $b = b'$).
8. Kui tasandil mitteasetsevast punktist on sellele tasandile tõmmatud mitu kaldlõiku, siis
1) võrdsete kaldlõikude ristprojektsioonid on võrdsed,



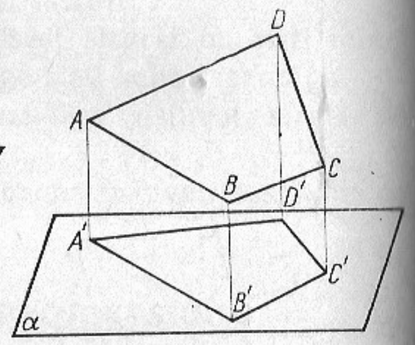
Joon. 11.19



Joon. 11.20



Joon. 11.21



Joon. 11.22

2) pikemale kaldlõigule vastab pikem ristprojektsioon, 3) võrdsete ristprojektsioonidega kaldlõigud on võrdsed, 4) pikemale ristprojektsioonile vastab pikem kaldlõik (joon. 11.21).

9. Kui hulknurga tasand pole risti ekraaniga, siis hulknurga ristprojektsiooniks on hulknurk (joon. 11.22).

10. Hulknurga ristprojektsiooni pindala võrdub hulknurga pindala ning hulknurga tasandi ja ekraani vahelise nurga koosinuse korrutisega (joon. 11.22):

$$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot \cos\varphi,$$

kus φ on tasandi α ning hulknurga $ABCD$ tasandi vaheline nurk.

11.6. KAHETAHULINE NURK

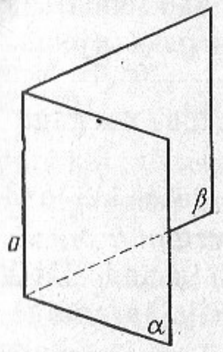
11.6.1. Kahetahuline nurk. Kahetahuliseks nurgaks nimetatakse kujundit, mille moodustavad kaks ühest sirgest väljuvat erinevat pooltasandit (joon. 11.23). Seda sirget nimetatakse **kahetahulise nurga servaks** ning pooltasandeid kahetahulise nurga **tahkudeks**.

Joonisel 11.23 on kahetahulise nurga servaks sirge a ning tahkudeks pooltasandid α ja β. Joonisel kujutatud kahetahulist nurka tähistatakse sümboliga $\alpha a \beta$ või $\alpha\beta$.

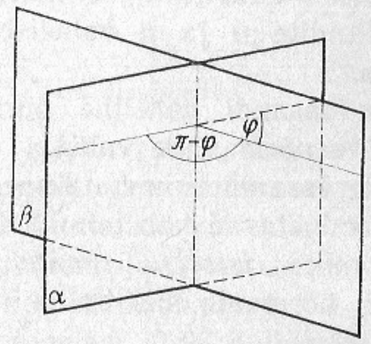
Mõningatel juhtudel defineeritakse kahetahuline nurk ka ruumi osana, mille moodustavad pooltasandid, nende ühine äär ning ruumi osa, mis jääb pooltasandite vahele. Lühemalt: kahetahuline nurk on kahe lõikuvate äärtasanditega poolruumi ühisosa.

Kahe tasandi lõikumisel tekib neli kahetahulist nurka (joon. 11.24).

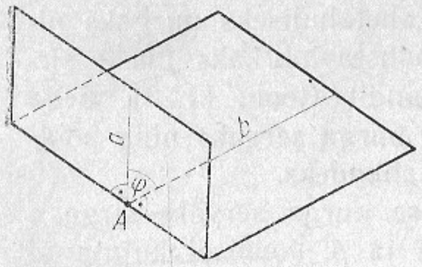
11.6.2. Kahetahulise nurga joonnurk. Kahetahulise nurga joonnurgaks nimetatakse nurka, mille moodustavad kummalegi tahule serva mingist punktist servaga risti tõmmatud kiired (joonisel 11.25 kiirte a ja b poolt moodustatud nurk φ). Et joonnurga tasand on risti kahetahulise nurga servaga, siis kahetahulise nurga joonnurgaks nimetatakse kahetahulise nurga ühisosa tasandiga, mis on risti kahetahulise nurga servaga.



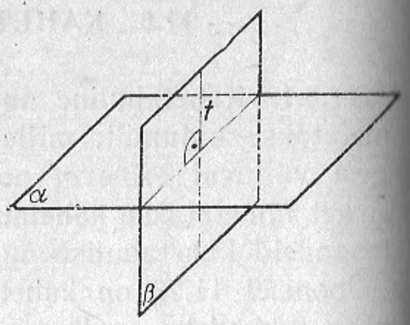
Joon. 11.23



Joon. 11.24



Joon. 11.25



Joon. 11.26

Kahetahulise nurga joonnurga suurus ei sõltu joonnurga tipu (A) asukohast serval.

Kahetahulist nurka mõõdetakse tema joonnurgaga: kahetahulise nurga suuruseks (mõõtarvuks) nimetatakse tema joonnurga mõõtarvu.

Kahetahulised nurgad on võrdsed, kui nende joonnurgad on võrdsed. Sel juhul saab üht kahetahulist nurka paigutada teisele nii, et nad ühtivad.

Kahest kahetahulisest nurgast nimetatakse suuremaks seda, mille joonnurk on suurem.

11.6.3. Kahe lõikuva tasandi vaheline nurk. Kahe lõikuva tasandi vaheliseks nurgaks nimetatakse iga nende tasandite lõikumisel tekkiva kahetahulise nurga joonnurka (nurk φ või $\pi - \varphi$ joonisel 11.24). Mõningatel juhtudel loetakse kahe tasandi vaheliseks nurgaks kahetahulistele nurkadele vastavatest joonnurkadest väiksemat. Sel juhul on tasandite α ja β vaheliseks nurgaks (joon. 11.24) nurk φ.

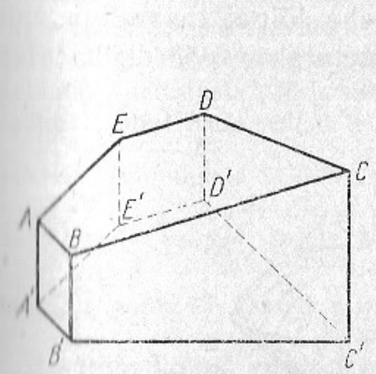
Kahe tasandi vaheline nurk võrdub nurgaga nende tasandite normaalide vahel.

Kahte tasandit nimetatakse **ristuvateks,** kui nad lõikudes moodustavad kahetahulise täisnurga.

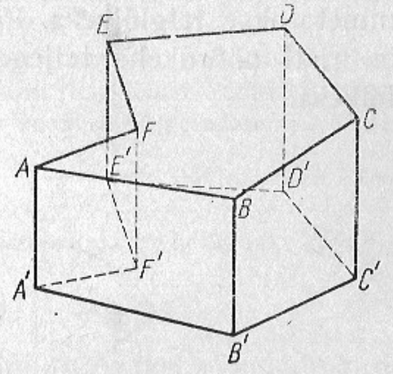
Tasandite *ristseisu tunnus*: kui tasand läbib teise tasandi normaali, siis on ta risti selle tasandiga (joon. 11.26).

11.7. HULKTAHUKAD JA PÖÖRDKEHAD

11.7.1. Hulktahukas. Hulktahukaks ehk **polüeedriks** (kr. *poly* — palju, kr. *hedra* — alus, pind, külg) nimetatakse geomeetrilist keha, mida piiravad tasandilised hulknurgad (joon. 11.27 ja 11.28). Hulktahukat piiravaid hulknurki nimetatakse hulktahuka **tahkudeks**, hulknurkade tippe hulktahuka **tippudeks** ning hulknurkade külgi hulktahuka **servadeks.** Hulktahuka eri tahkudel olevaid tippe ühendavaid lõike nimetatakse hulktahuka **diagonaalideks** Hulktahukat piiravate tahkude tõttu nimetatakse hulktahukat ka **tahukaks** ehk **tahkkehaks.**



Joon. 11.27



Joon. 11.28

Näide. Joonisel 11.27 ja 11.28 olevate hulktahukate tahkudeks on hulknurgad $ABB'A'$, $BCC'B'$, ..., $ABCDE$ (joon. 11.27), $A'B'C'D'E'F'$ (joon. 11.28) jne. Punktid A, B, C, ..., A′, B′, C′, ... on hulktahuka tipud, lõigud AB, BC, ..., A′B′, B′C′, ..., AA′, BB′, ... on servad, lõigud AC′, AD′, ..., BD′, DE′, ... on diagonaalid.

Hulktahukat nimetatakse k u m e r a k s, kui ta asetseb ühel pool iga oma tahu tasandit. Vaadeldes hulktahukat ruumi osana, nimetatakse hulktahukat kumeraks, kui iga tema kahte punkti ühendav lõik jääb hulktahuka sisse (koosneb hulktahuka punktidest). Joonisel 11.27 kujutatud hulktahukas on kumer, joonisel 11.28 kujutatud hulktahukas on mittekumer.

Euleri *lause*. Kui kumeral hulktahukal on p tahku, q serva ja r tippu, siis

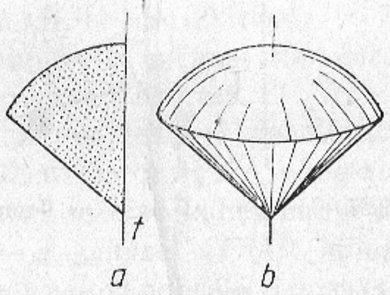
$$p+r-q=2.$$

11.7.2. Pöördkeha. Pöördkehaks nimetatakse geomeetrilist keha, mis tekib tasandilise kujundi pöörlemisel ümber kujundi tasandil asetseva sirge. Joonistel 11.29 ja 11.30 on kujutatud pöördkehad (*b*), mis tekivad tasandiliste kujundite (*a*) pöörlemisel ümber sirge t.

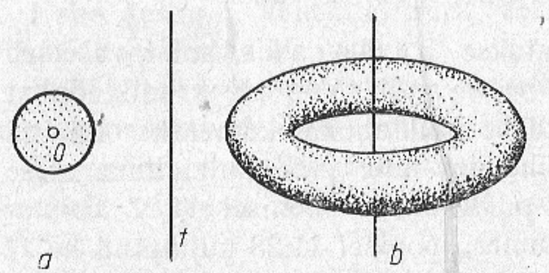
Sirget (t), mille ümber toimub pöördkeha tekitava kujundi pöörlemine, nimetatakse pöördkeha **teljeks.**

Pöördkeha telg on ühtlasi tema sümmeetriatelg.

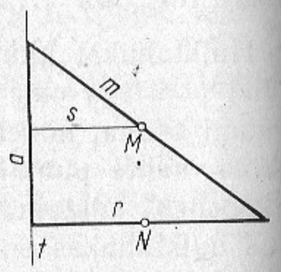
Pöördkeha lõiget tasandiga, mis läbib pöördkeha telge, nimetatakse **telglõikeks.** Pöördkeha lõiget tasandiga, mis on risti pöördkeha teljega, nimetatakse pöördkeha **ristlõikeks.**



Joon. 11.29



Joon. 11.30



Joon. 11.31

11.7.3. Guldini lause sõnastatakse eraldi pöördkeha pindala ja ruumala kohta.

1. **Pöördkeha pindala** võrdub pöördkeha tekitava tasandilise kujundi rajajoone (kontuuri) pikkuse ja kontuuri raskuskeskme poolt moodustatava ringjoone pikkuse korrutisega, kui pöörlemistelg ei lõika kontuuri.

Märkus. Kui pöörlev kontuur ei ole kinnine või koosneb vaid ühe joone kaarest, saab Guldini lause põhjal leida pöördkeha osade pindalasid või vastava pöördpinna pindala. Guldini lauses asendub kontuur (joon) siis joone kaarega.

Näited. 1. Joonisel 11.30 (*b*) on pöördkehaks toor, mis on saadud ringjoone pöörlemisel ümber sirge t (joon. 11.30, *a*). Olgu r ringjoone raadius ja R ringjoone raskuskeskme O kaugus sirgest t. Guldini lause põhjal on toori pindala $S=2\pi r\cdot 2\pi R=4\pi^2 rR$.

2. Pöörelgu täisnurkne kolmnurk ümber kaateti a (joon. 11.31). Kogu kontuur ei moodusta pöörlemisel koonust (telg lõikab kontuuri), seega saame Guldini lause põhjal leida kas koonuse külgpindala või põhjapindala. Külgpindala $S_k=m\cdot 2\pi s=m\cdot 2\pi\frac{r}{2}=\pi rm$. Põhjapindala $S_p=$ $=r\cdot\left(2\pi\cdot\frac{r}{2}\right)=\pi r^2$. Punkt M on moodustaja m keskpunkt (raskuskese) ja punkt N kaateti r keskpunkt (raskuskese).

2. **Pöördkeha ruumala** võrdub pöördkeha moodustava tasandilise kujundi pindala ja selle kujundi raskuskeskme poolt moodustatava ringjoone pikkuse korrutisega, kui pöörlemistelg ei lõika pöörlevat kujundit.

Näiteks toori (joon. 11.30, *b*) ruumala $V=\pi r^2\cdot 2\pi R=2\pi^2 r^2 R$, kus r on pöörleva ringi raadius ning R ringi raskuskeskme O kaugus pöörlemisteljest t (joon. 11.30, *a*).

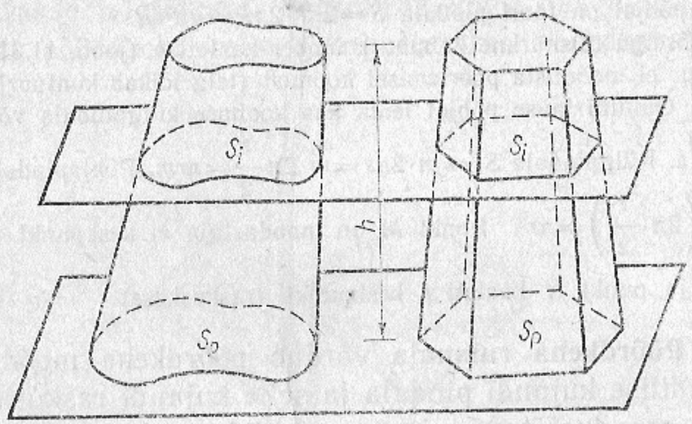
Lause nimetus tuleneb rootsi matemaatiku P. Guldini (1577—1643) nimest.

11.8. CAVALIERI PRINTSIIP

Kui kahel kehal on võrdsed kõrgused ja pindvõrdsed põhjad ning kehade lõikamisel põhjadega paralleelsete tasanditega, mis on põhjadest samal kaugusel, saadakse pindvõrdsed lõiked, siis need kehad on ruumvõrdsed.

Joonisel 11.32 kujutatud kehad on võrdse ruumalaga eeldusel, et nende kõrgused (h) on võrdsed, põhjapindalad (S_p) on võrdsed ja põhjast suvalisel kaugusel (i) tehtud, põhjaga paralleelsete lõigete pindalad (S_i) on võrdsed.

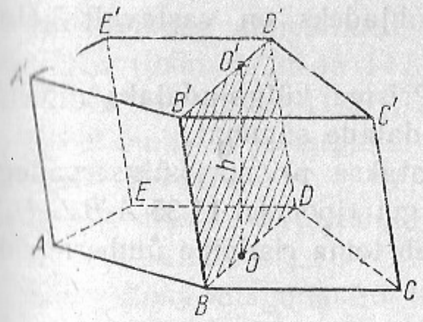
Cavalieri printsiibina sõnastatud väite püstitas itaalia matemaatik F. B. Cavalieri (1598—1647).



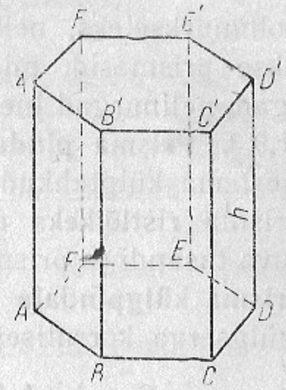
Joon. 11.32

11.9. PRISMA

11.9.1. Prisma. Prismaks nimetatakse hulktahukat (art. 11.7.1.), mille kaks tahku on vastavalt paralleelsete ja võrdsete külgedega kumerad hulknurgad ning ülejäänud tahud on rööpkülikud, millel on kummagi hulknurgaga üks ühine külg (joon. 11.33). Paralleelsete ja vastavalt võrdsete külgedega hulknurgad on kongruentsed ning asetsevad paralleelsetel tasanditel. Neid tahke nimeta-



Joon. 11.33



Joon. 11.34

takse prisma **põhjadeks** (joon. 11.33 $ABCDE$ ja $A'B'C'D'E'$). Rööpkülikuid ($ABB'A'$, $BCC'B'$, jne.) nimetatakse prisma **külgtahkudeks.** Prisma põhjade servi nimetatakse prisma **põhiservadeks** (joonisel 11.33 AB, BC, ..., $A'B'$, $B'C'$ ...) ja põhjasid ühendavaid servi prisma **külgservadeks** (AA', BB', ...). Prisma põhjade vahelist kaugust nimetatakse prisma **kõrguseks** (joonisel 11.33 lõik OO').

Lõiku, mis ühendab prisma kaht mitte ühele tahule kuuluvat tippu, nimetatakse prisma **diagonaaliks.** Tasandit, mis läbib kahte mitte ühele tahule kuuluvat külgserva, nimetatakse prisma **diagonaaltasandiks** (joonisel 11.33 tasand $BB'D'D$).

11.9.2. Prismade liigitamine. Prismad liigitatakse 1) püst- ja kaldprismadeks, 2) korrapärasteks ja mittekorrapärasteks prismadeks, 3) kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne. prismadeks.

Püstprismaks nimetatakse prismat, mille külgservad on risti põhjadega. Püstprisma külgtahkudeks on ristkülikud (joon. 11.34). **Kaldprismaks** nimetatakse prismat, mille külgservad ei ole risti põhjadega.

Korrapäraseks prismaks nimetatakse püstprismat, mille põhjadeks on korrapärased hulknurgad (joon. 11.34). **Mittekorrapäraseks** nimetatakse prismat, mis ei ole püstprisma, või püstprismat, mille põhjaks pole korrapärane hulknurk (joon. 11.33).

Kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne. prismadeks nimetatakse prismasid, mille põhjadeks on vastavalt kolmnurgad, nelinurgad jne.

11.9.3. Prisma pindala. Prisma **külgpindalaks** nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat.

Prisma **ristlõikeks** nimetatakse prisma külgservadega ristuva tasandi ja prisma lõiget (joonisel 11.35 $A_0B_0C_0D_0$).

Prisma külgpindala võrdub tema ristlõike ümbermõõdu ja külgserva korrutisega:

$$S_k = l \cdot (A_0B_0 + B_0C_0 + \ldots + D_0A_0).$$

Püstprisma külgpindala võrdub tema põhja ümbermõõdu ja kõrguse (h) korrutisega (joon. 11.34):

$$S_k = h \cdot (AB + BC + \ldots + FA).$$

Prisma põhjapindala leitakse kui hulknurga pindala. Põhjapindala tähistatakse sümboliga S_p.

Prisma täispindala ehk pindala

$$S = S_k + 2 \cdot S_p.$$

11.9.4. Prisma ruumala võrdub (joon. 11.35)

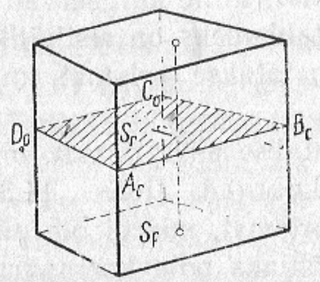
1) ristlõike pindala (S_r) ja külgserva (l) korrutisega:

$$V = l \cdot S_r;$$

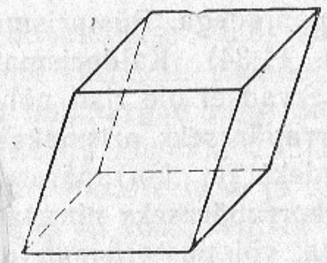
2) põhjapindala ja kõrguse (h) korrutisega:

$$V = h \cdot S_p.$$

Kolmnurkne prisma on tükeldatav kolmeks ruumvõrdseks tetraeedriks (kolmnurkseks püramiidiks).



Joon. 11.35



Joon. 11.36

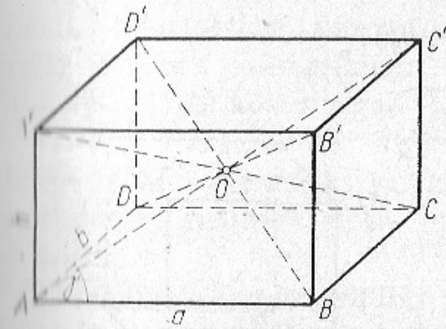
11.10. RÖÖPTAHUKAS

Rööptahukaks nimetatakse prismat, mille põhjaks on rööpkülik (joon. 11.36 ja 11.37).

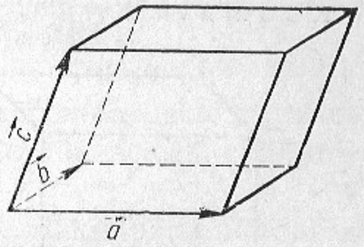
Omadusi (joon. 11.37).

1. Rööptahuka vastastahud on paralleelsed (näiteks $ABB'A' \parallel DCC'D'$).
2. Rööptahuka vastastahud on võrdsed (näiteks $ADD'A' = BCC'B'$).
3. Rööptahuka diagonaalid lõikuvad ühes punktis (O), mis poolitab iga diagonaali.

Et rööptahukas on prisma, siis liigituvad rööptahukad kaldrööptahukaiks (joon. 11.36) ja püströöptahukaiks (joon. 11.37).



Joon. 11.37



Joon. 11.38

Pindala.

Rööptahuka külgpindala S_k ja täispindala S arvutatakse nagu prisma külg- ja täispindala. Püströöptahuka korral (joon. 11.37)

$$S_k = 2h(a+b), \quad S = 2h(a+b) + 2ab \sin \gamma.$$

Ruumala.

Kaldrööptahukas: $V = lS_r = hS_p$.

Püströöptahukas (joon. 11.37): $V = hS_p = abh \sin \gamma$.

Kui (joon. 11.38) $\vec{a} = (X_1;\ Y_1;\ Z_1)$, $\vec{b} = (X_2;\ Y_2;\ Z_2)$, $\vec{c} = (X_3;\ Y_3;\ Z_3)$, siis

$$V=\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{Vmatrix}=|X_1Y_2Z_3+X_2Y_3Z_1+X_3Y_1Z_2-X_3Y_2Z_1-X_2Y_1Z_3-X_1Y_3Z_2|.$$

11.11. RISTTAHUKAS

Risttahukaks nimetatakse püströöptahukat, mille põhjaks on ristkülik (joon. 11.39).

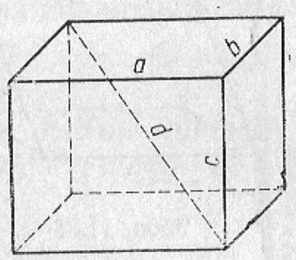
Omadusi.

1. Et risttahukas on rööptahukas, siis kehtivad kõik rööptahuka omadused.
2. Risttahuka kõik tahud on ristkülikud.
3. Risttahuka diagonaalid on võrdsed:

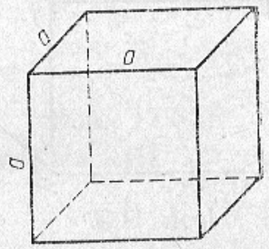
$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

Pindala $S=2(ab+ac+bc)$.

Ruumala $V=abc$.



Joon. 11.39



Joon. 11.40

11.12. KUUP

Kuubiks ehk **regulaarseks heksaeedriks** (kr. *hex* — kuus) nimetatakse risttahukat, mille kõik servad on võrdsed (joon. 11.40).

Omadusi.

1. Et kuup on risttahukas, siis on tal kõik risttahuka omadused.
2. Kuubi kõik tahud on ruudud.

Pindala $S=6a^2$.

Ruumala $V=a^3$.

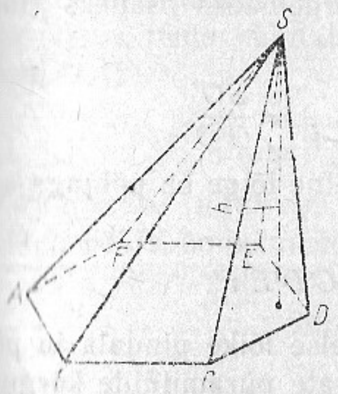
11.13. PÜRAMIID

11.13.1. Püramiid. Püramiidiks nimetatakse hulktahukat, mille üks tahk on hulknurk ja kõik ülejäänud tahud ühise tipuga kolmnurgad (joon. 11.41 ja 11.42). Hulknurka (joonisel 11.41 hulknurk *ABCDEF*) nimetatakse püramiidi **põhjaks** ja ühise tipuga kolmnurki (*ABS*, *BCS*, ...) **külgtahkudeks.** Püramiidi põhja servi (*AB*, *BC*, ...) nimetatakse püramiidi **põhiservadeks** ning külgtahkude ühiseid servi (*AS*, *BS*, ...) püramiidi külgservadeks. Püramiidi külgtahkude ühist tippu nimetatakse püramiidi **tipuks** (punkt *S* joonisel 11.41). Püramiidi tipu kaugust põhjast (joonisel 11.41 ja 11.42 lõik *h*) nimetatakse püramiidi **kõrguseks.**

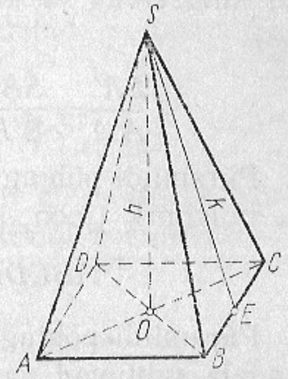
Tasandit, mis läbib püramiidi tippu ja põhja diagonaali, nimetatakse püramiidi **diagonaaltasandiks** ning selle ühisosa püramiidiga püramiidi **diagonaallõikeks** (joonisel 11.42 kolmnurgad *ASC* ja *BSD*).

11.13.2. Püramiidide liigitamine. Püramiidid liigitatakse 1) korrapärasteks ja mittekorrapärasteks, 2) kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne. (*n*-nurkseteks) püramiididdeks.

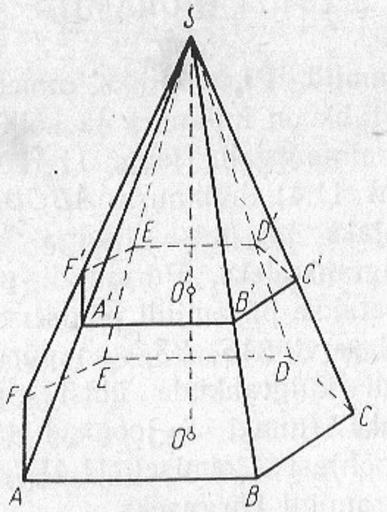
Korrapäraseks püramiidiks nimetatakse püramiidi, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille kõrguse aluspunkt ühtib põhja keskpunktiga. Korrapärase püramiidi



Joon. 11.41



Joon. 11.42



Joon. 11.43

(joon. 11.42) külgtahud on kongruentsed kolmnurgad. Korrapärase püramiidi tipust tõmmatud külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi **apoteemiks** (*SE* joonisel 11.42). Sirget, mis läbib korrapärase püramiidi tippu ja põhja keskpunkti, nimetatakse püramiidi **teljeks.**

Püramiidi, mille põhjaks on *n*-nurkne hulknurk, nimetatakse ***n*-nurkseks püramiidiks.**

11.13.3. Lauseid püramiidi kohta

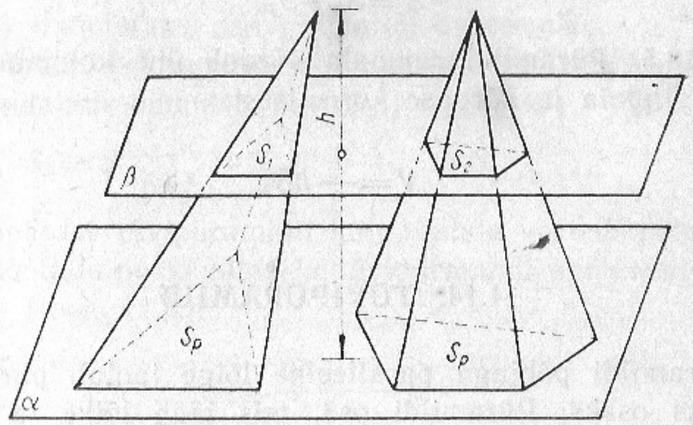
1. Püramiidi põhjaga paralleelne lõige jaotab püramiidi külgservad ja kõrguse võrdelisteks osadeks (joon. 11.43):

$$\frac{SA'}{A'A}=\frac{SB'}{B'B}=\frac{SC'}{C'C}=\ldots=\frac{SO'}{O'O}.$$

2. Püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk (joon. 11.43):

$$ABCDEF\sim A'B'C'D'E'F'.$$

3. Püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala ja põhjapindala suhtuvad nagu vastavate püramiidide kõrguste ruudud (joon. 11.43):



Joon. 11.44

$$\frac{S'}{S_p}=\frac{(SO')^2}{(SO)^2}.$$

4. Kui kahel püramiidil on võrdsed kõrgused ja võrdsed põhjapindalad, siis on neil võrdsed ka põhjaga paralleelsete lõigete pindalad, kui lõiked on tehtud põhjast ühel ja samal kaugusel. Joonisel 11.44 kujutatud püramiidide korral $S_1=S_2$ eeldusel, et lauses esitatud tingimused on täidetud.

11.13.4. Püramiidi pindala. Püramiidi **külgpindalaks** nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat. Seega (joon. 11.43)

$$S_k=S_{\triangle ABS}+S_{\triangle BCS}+\ldots+S_{\triangle FAS}.$$

Korrapärase *n*-nurkse püramiidi külgpindala võrdub poolega põhja ümbermõõdu ja apoteemi korrutisest:

$$S_k=\frac{1}{2}nak,$$

kus a on püramiidi põhiserv ning k püramiidi apoteem.

Püramiidi **täispindala** ehk pindala

$$S=S_k+S_p.$$

11.13.5. Püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga põhjapindala ja kõrguse korrutisest:

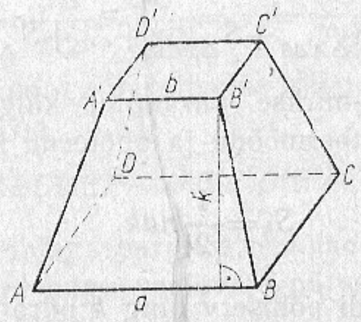
$$V=\frac{1}{3}hS_p.$$

11.14. TÜVIPÜRAMIID

Püramiidi põhjaga paralleelne lõige jaotab püramiidi kaheks osaks. Püramiidi osa, mis jääb lõike ja põhja vahele, nimetatakse **tüvipüramiidiks** (joon. 11.43 keha $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$). Tüvipüramiidi paralleelseid tahke (püramiidi põhi ja sellega paralleelne lõige) nimetatakse **tüvipüramiidi põhjadeks**. Põhjadevahelist kaugust nimetatakse tüvipüramiidi **kõrguseks** (joon. 11.43, lõik OO'). Tüvipüramiidi külgtahud on trapetsid ja põhjad sarnased hulknurgad.

n-nurksel tüvipüramiidil on diagonaalid, kui $n>3$. Tüvipüramiidi kaht mitte ühele tahule kuuluvat serva läbivat tasandit nimetatakse **diagonaaltasandiks** ja sellega määratud lõiget **diagonaallõikeks.** Joonisel 11.45 on diagonaallõigeteks trapetsid $AA'C'C$ ja $BB'D'D$.

Tüvipüramiidi, mis saadakse korrapärase püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasandiga, nimetatakse **korrapäraseks tüvipüramiidiks**. Korrapärase tüvipüramiidi (joon. 11.45) külgtahud on kongruentsed trapetsid ning



Joon. 11.45

põhjad sarnased korrapärased hulknurgad. Külgtahu kõrgust (k) nimetatakse tüvipüramiidi **apoteemiks**.

Tüvipüramiidi **külgpindalaks** nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat. Seega (joon. 11.43)

$$S_k=S_{ABB'A'}+S_{BCC'B'}+\ldots+S_{FAA'F'}.$$

Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja tüvipüramiidi apoteemi korrutisega (joon. 11.45):

$$S_k=\frac{na+nb}{2}\cdot k.$$

Tüvipüramiidi **täispindala** ehk pindala

$$S=S_k+S_1+S_2,$$

kus S_1 ja S_2 on põhjade pindalad.

Tüvipüramiidi **ruumala**

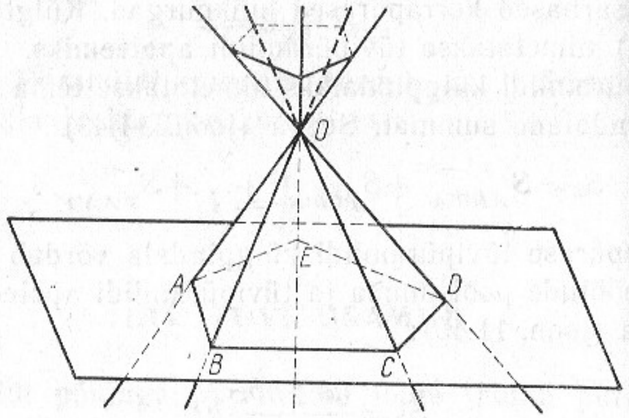
$$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2),$$

kus h on tüvipüramiidi kõrgus.

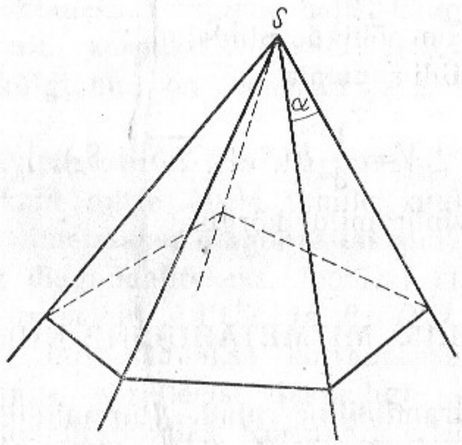
11.15. MITMETAHULINE NURK

11.15.1. Püramiidiline pind. Püramiidiliseks pinnaks nimetatakse niisugust pinda (joon. 11.46), mis tekib sirge (AO — **moodustaja**) liikumisel mööda kinnist tasapinnalist murdjoont ($ABCDE$ — **juhtjoon**), kui sirge (AO) üks punkt (O — tekkiva pinna **tipp**) jääb kogu aeg paigale. Edaspidi vaatleme juhtjoonena ainult kinnist kumerat murdjoont.

11.15.2. Mitmetahuline nurk. Mitmetahuliseks nurgaks nimetatakse püramiidilist pinda ühel pool tippu koos ruumi osaga, mida ta piirab (joon. 11.47). Mitmetahulist nurka piirav pind koosneb tasandite osadest, mida nimetatakse **tahkudeks.** Tahkude ühist punkti (S) nimetatakse



Joon. 11.46



Joon. 11.47

mitmetahulise nurga tipuks. Mitmetahulise nurga tahkude arv võib olla kuitahes suur, tahkude vähim arv saab olla 3.

Vaadeldes mitmetahulise nurga tahkusid nurkadena, nimetatakse neid mitmetahulise nurga **tasanurkadeks** (näiteks nurk α joonisel 11.47).

O m a d u s i.

1. Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kahe

ülejäänud tasanurga summast ja suurem kahe ülejäänud tasanurga vahest.

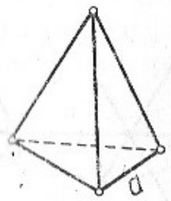
2. Mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 2π.

11.16. REGULAARNE HULKTAHUKAS

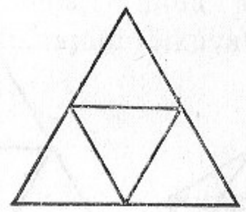
11.16.1. Regulaarne hulktahukas. Regulaarseks hulktahukaks nimetatakse hulktahukat, mille kõik tahud on kongruentsed korrapärased hulknurgad ja mille igast tipust lähtub võrdne arv servi.

Regulaarset hulktahukat piirav pind koosneb vaid samanimelistest hulknurkadest.

Regulaarseid hulktahukaid on viis: regulaarne tetraeeder (kr. *tettara* — neli, kr. *hedra* — alus, pind), regulaarne heksaeeder (kr. *hex* — kuus), regulaarne oktaeeder (kr. *okto* — kaheksa), regulaarne dodekaeeder (kr. *dodeka* — kaksteist), regulaarne ikosaeeder (kr. *eikosi* — kakskümmend).



Joon. 11.48

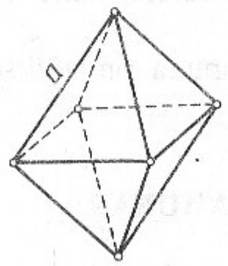


Joon. 11.49

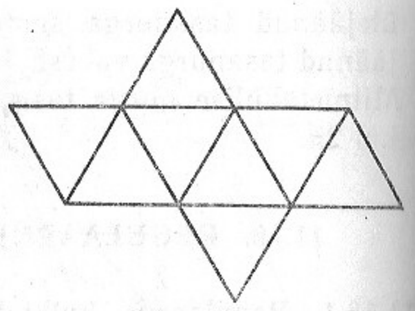
11.16.2. Regulaarne tetraeeder ehk regulaarne nelitahukas koosneb neljast võrdkülgsest kolmnurgast (joon. 11.48). Pinnalaotus on kujutatud joonisel 11.49;

$$S=a^2\sqrt{3}, \quad V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

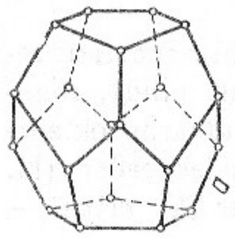
11.16.3. Regulaarne heksaeeder ehk regulaarne kuustahukas ehk kuup (vt. art. 11.12.).



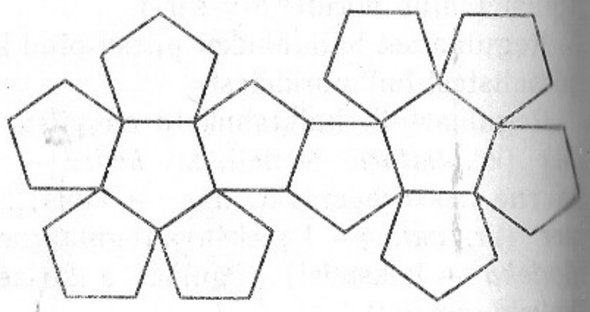
Joon. 11.50



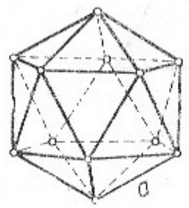
Joon. 11.51



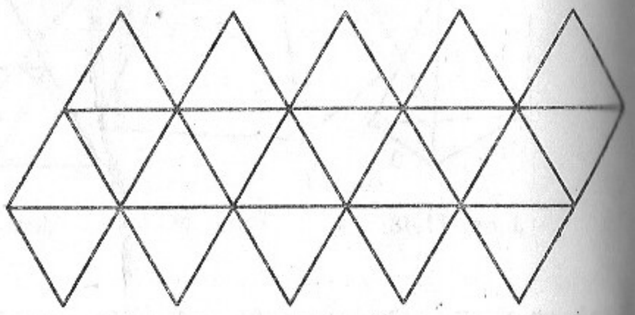
Joon. 11.52



Joon. 11.53



Joon. 11.54



Joon. 11.55

11.16.4. Regulaarne oktaeeder ehk regulaarne kaheksatahukas koosneb kaheksast võrdkülgsest kolmnurgast (joon. 11.50 ja joon. 11.51, pinnalaotus);

$$S=2a^2\sqrt{3}, \qquad V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

11.16.5. Regulaarne dodekaeeder ehk regulaarne kaksteisttahukas koosneb kaheteistkümnest korrapärasest viisnurgast (joon. 11.52 ja joon. 11.53, pinnalaotus);

$$S=3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}, \qquad V=\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{3}.$$

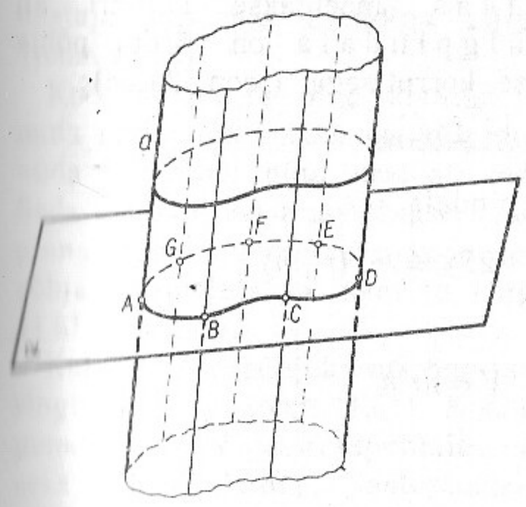
11.16.6. Regulaarne ikosaeeder ehk regulaarne kakskümmendtahukas koosneb kahekümnest korrapärasest kolmnurgast (joon. 11.54 ja joon. 11.55, pinnalaotus);

$$S=5a^2\sqrt{3}, \qquad V=\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}.$$

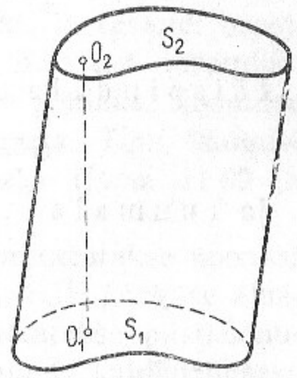
11.17. SILINDER

11.17.1. Silindriliseks pinnaks nimetatakse pinda (joon. 11.56), mis tekib sirge (a — **moodustaja**) liikumisel iseendaga paralleelselt mööda kinnist tasandilist kõverjoont ($ABCDEFG$ — **juhtjoon**).

11.17.2. Silindriks nimetatakse keha, mida piiravad silindriline pind ja kaks tema moodustajaid lõikavat paralleelset tasandit (joon. 11.57).



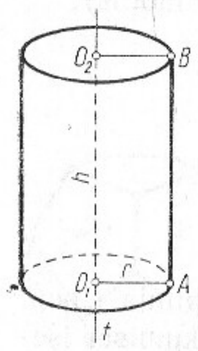
Joon. 11.56



Joon. 11.57

Tasandite osi, mida lõikab ära silindriline pind teda lõikavatest paralleelsetest tasanditest (joon. 11.57, S_1 ja S_2), nimetatakse silindri **põhjadeks**; silindrilise pinna osa, mis jääb põhjade vahele, nimetatakse silindri **külgpinnaks**. Silindri põhjade vahelist kaugust nimetatakse silindri **kõrguseks** (O_1O_2).

Kui silindri põhjaks on ring (silindrilise pinna juhtjooneks on ringjoon), nimetatakse silindrit **ringsilindriks**.



Joon. 11.58

Kui silindrilist pinda lõigata moodustajaga ristuvate kahe tasandiga, tekib **püstsilinder** (joon. 11.58). Kui silindrilist pinda lõigata tasanditega, mis ei ole risti moodustajaga, tekib **kaldsilinder** (joon. 11.57).

Püstringsilindrit nimetatakse ka **pöördsilindriks**, sest seda saab defineerida kui pöördkeha, mis tekib ristküliku pöörlemisel ümber oma ühe külje. Näiteks joonisel 11.58 kujutatud pöördsilinder tekib ristküliku O_1ABO_2 pöörlemisel ümber külje O_1O_2. Sirget t nimetatakse pöördsilindri teljeks. Pöördsilindri telg on ühtlasi tema sümmeetriatelg.

K o o l i m a t e m a a t i k a s mõeldakse silindri all pöördsilindrit, mille k ü l g p i n d a l a on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega (joon. 11.58):

$$S_k = 2\pi rh;$$

t ä i s p i n d a l a ehk pindala

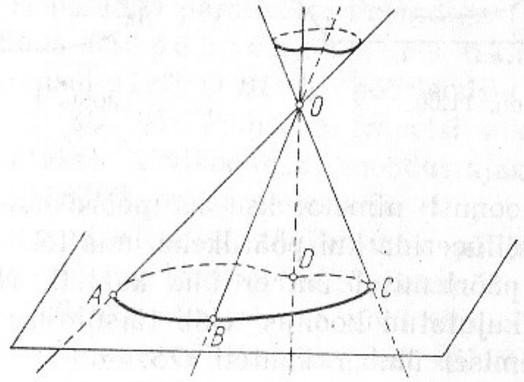
$$S = S_k + 2S_p = 2\pi r(r+h)$$

ja r u u m a l a

$$V = \pi r^2 h.$$

11.18. KOONUS

11.18.1. Kooniliseks pinnaks nimetatakse niisugust pinda (joon. 11.59), mis tekib sirge (AO — **moodustaja**) liikumisel mööda kinnist tasandilist kõverjoont (joon $ABCD$ — **juhtjoon**), kui sirge (AO) üks punkt (O — tekkiva pinna **tipp**) jääb paigale.

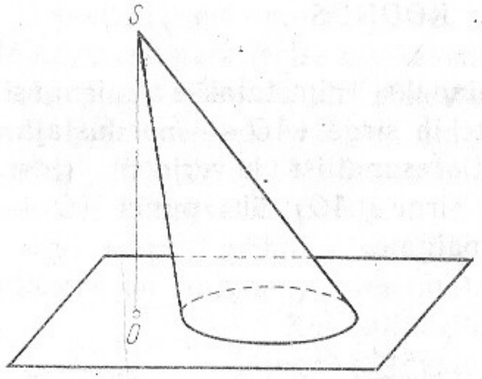


Joon. 11.59

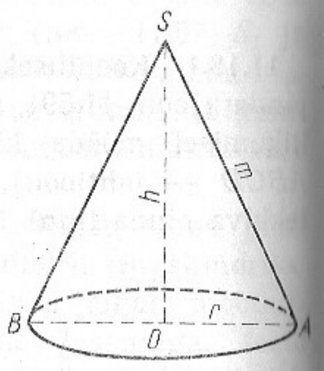
11.18.2. Koonuseks nimetatakse keha, mis tekib koonilise pinna lõikamisel ühel pool koonilise pinna tippu moodustaja mistahes asendiga mitteparalleelse tasandiga (joon. 11.60).

Koonust piirav pind koosneb koonilise pinna osast, mida nimetatakse koonuse **külgpinnaks**, ja tasandi osast, mida kooniline pind eraldab teda lõikavast tasandist. Seda tasandi osa nimetatakse koonuse **põhjaks**. Koonilise pinna tippu nimetatakse koonuse **tipuks**. Tipu kaugust põhjast nimetatakse koonuse **kõrguseks** (joon. 11.60 ja 11.61, lõik OS).

Kui koonuse põhjaks on ring, siis nimetatakse koonust **ringkoonuseks** (joon. 11.61). Koonust, mille kõrguse aluspunkt ühtib põhja keskpunktiga, nimetatakse **püstkoonuseks** (joon. 11.61), vastupidisel juhul **kaldkoonuseks** (joon. 11.60).



Joon. 11.60



Joon. 11.61

Püstringkoonust nimetatakse ka **pöördkoonuseks**, sest seda saab defineerida kui pöördkeha, mis tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ümber ühe kaateti. Näiteks joonisel 11.61 kujutatud koonus tekib täisnurkse kolmnurga OAS pöörlemisel ümber kaateti OS.

Sirget OS nimetatakse koonuse teljeks, mis on ühtlasi tema sümmeetriatelg. Koonuse telge läbiva tasandi ja koonuse lõiget ($\triangle BAS$) nimetatakse koonuse **telglõikeks**.

K o o l i m a t e m a a t i k a s mõeldakse koonuse all pöördkoonust, mille k ü l g p i n d a l a on võrdne poolega põhja ümbermõõdu ja moodustaja korrutisest:

$$S_k=\pi rm;$$

t ä i s p i n d a l a ehk pindala

$$S=S_k+S_p=\pi r(r+m)$$

ja r u u m a l a

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

11.19. TÜVIKOONUS

Koonuse (vaatleme vaid ringkoonust) põhjaga paralleelne lõige jaotab koonuse kaheks osaks. Koonuse osa, mis jääb lõike ja põhja vahele, nimetatakse **tüvikoonuseks** (joon. 11.62 ja 11.63).

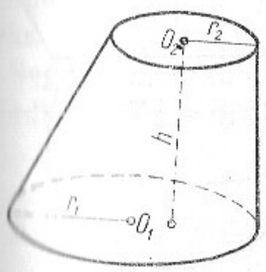
K o o l i m a t e m a a t i k a s mõeldakse tüvikoonuse all niisugust tüvikoonust, mis on saadud pöördkoonusest, lõigates viimast põhjaga paralleelse tasandiga (joon. 11.63). See tüvikoonus on p ö ö r d k e h a, mis tekib täisnurkse trapetsi (joonisel 11.63 O_1BDO_2) pöörlemisel ümber oma lühema haara (O_1O_2). Pöörleva trapetsi pikemat haara (m) nimetatakse tüvikoonuse **moodustajaks**, lühemat haara (O_1O_2) tüvikoonuse **teljeks** ja ringe, mis tekivad trapetsi aluste pöörlemisel, tüvikoonuse **põhjadeks**. Tüvikoonuse telge läbiva tasandi ja tüvikoonuse lõiget (näiteks trapets $ABDC$) nimetatakse tüvikoonuse **telglõikeks**. Tüvikoonuse põhjade vahelist kaugust nimetatakse tüvikoonuse **kõrguseks** (h).

Tüvikoonuse k ü l g p i n d a l a võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja moodustaja korrutisega (joon. 11.63):

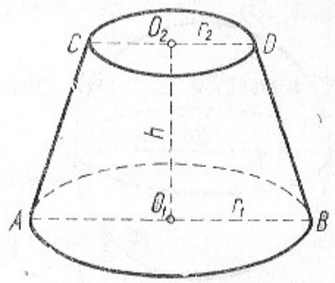
$$S_k=\pi(r_1+r_2)m.$$

Tüvikoonuse t ä i s p i n d a l a ehk pindala

$$S=S_k+S_1+S_2=\pi[r_1^2+r_2^2+m(r_1+r_2)].$$



Joon. 11.62



Joon. 11.63

Tüvikoonuse r u u m a l a

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2).$$

11.20. KERA

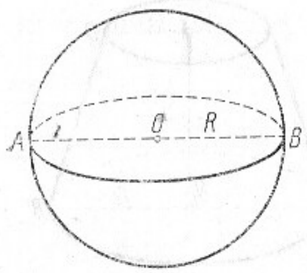
11.20.1. Keraks nimetatakse ruumi osa, mille kõigi punktide kaugused ühest kindlast punktist O on mitte suuremad kui etteantud arv R. Punkti O nimetatakse kera **keskpunktiks** ning suurust R kera **raadiuseks** (joon. 11.64). Kera piirav pind on sfäär (art. 11.21.). Sfääri kahte punkti ühendavat lõiku, mis läbib kera keskpunkti, nimetatakse kera **diameetriks** (tähis d), $d=2R$.

Kera on p ö ö r d k e h a, sest ta tekib poolringi pöörlemisel ümber oma diameetri.

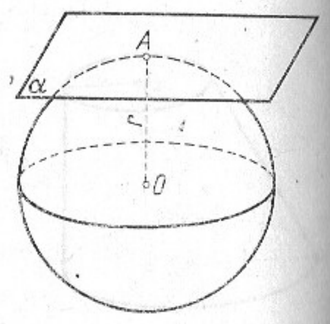
Tasandit, millel on kerapinnaga üksainus ühine punkt, nimetatakse kera **puutujatasandiks** (joon. 11.65, tasand α).

L a u s e i d kera kohta.

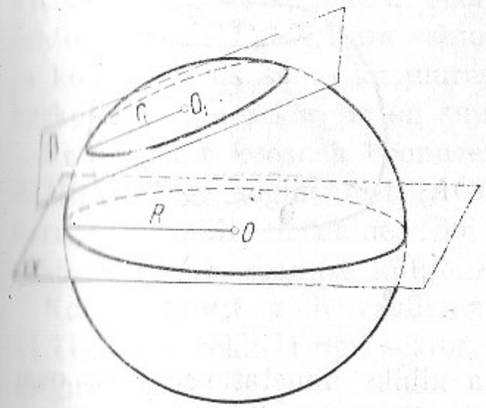
1. Kera iga tasandiline lõige on ring (joon. 11.66). Kui lõiketasand läbib kera keskpunkti, siis lõikeringi raadiuseks on kera raadius ning lõiget nimetatakse kera **suurringiks**, vastavat lõikejoont **suurringjooneks** (joon. 11.66, lõige tasandiga α).
2. Kera puutujatasand on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega (joon. 11.65, $OA \perp \alpha$).



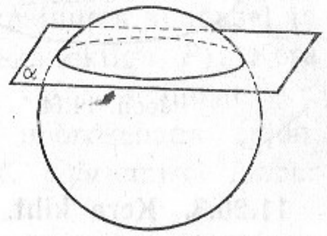
Joon. 11.64



Joon. 11.65



Joon. 11.66



Joon. 11.67

Kera p i n d a l a võrdub suurringi neljakordse pindalaga:

$$S=4\pi R^2=\pi d^2.$$

Kera r u u m a l a võrdub ühe kolmandikuga kera pindala ja raadiuse korrutisest:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{1}{3}SR.$$

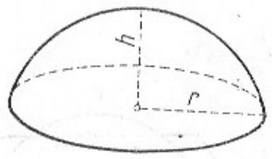
11.20.2. Kera segment. Lõigates kera tasandiga, jaotub kera kaheks osaks (joon. 11.67). Neid osi nimetatakse kera segmentideks. Kui lõiketasand läbib kera keskpunkti, on segmentideks poolkerad. Kera segmenti piiravad ring, mida nimetatakse segmendi **põhjaks**, ja sfääri segment (joon. 11.68). Segmendi põhja keskpunktist kera pinnani tõmmatud põhja ristlõiku nimetatakse segmedi kõrguseks.

Segmendi raadiuse (r), kõrguse (h) ja vastava kera raadiuse (R) vaheline s e o s:

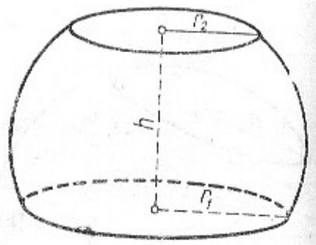
$$r^2+h^2=2Rh.$$

P i n d a l a $S=\pi(2Rh+r^2)=\pi(h^2+2r^2)$.

R u u m a l a $V=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$.



Joon. 11.68



Joon. 11.69

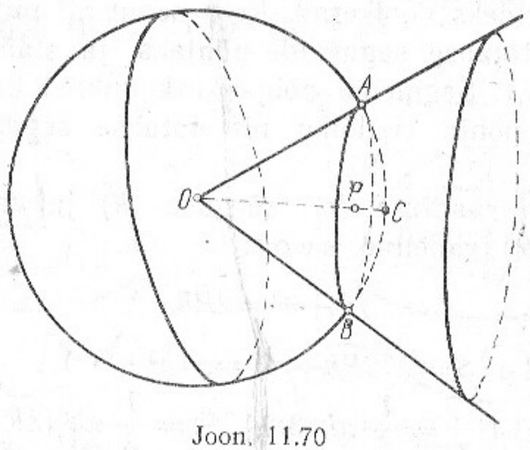
11.20.3. Kera kiht. Kera kihiks nimetatakse kera osa, mis jääb kahe paralleelse lõiketasandi vahele (joon. 11.69). Kera kihti piiravad kaks ringi (tasandite ja kera lõiked), mida nimetatakse kihi **põhjadeks**, ja kera pinna osa, mida nimetatakse kera **vööks**. Kera kihi põhjade vahelist kaugust nimetatakse kihi **kõrguseks** (h), ka vöö kõrguseks.

Kihi pindala $S=\pi(2Rh+r_1^2+r_2^2)$.

$$S_{vöö}=2\pi Rh.$$

Kihi ruumala $V=\frac{1}{6}\pi h(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$.

11.20.4. Kera sektor. Kera sektoriks nimetatakse kera osa, mille eraldab kerast ühel pool tippu asuva ringjoonelise juhtjoonega kooniline pind (art. 11.18.1.), kui tipp



Joon. 11.70

asetseb kera keskpunktis. Joonisel 11.70 kujutab kera sektorit keha $ACBO$. Kera sektorit võib vaadelda ka kera ja koonuse ühisosana, kusjuures koonuse tipp asub kera keskpunktis ning kõrgus on suurem kui kera raadius.

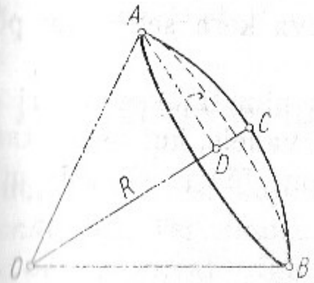
Kera sektor koosneb koonusest (joonisel 11.70 koonus AOB) ja kera segmendist (ACB), kusjuures koonusel ja kera segmendil on ühine põhi (keskpunktiga P). Kera sektorit piirab koonuse külgpind ja sfääri segment.

Kera sektorit võib vaadelda ka pöördkehana (joon. 11.71), mis tekib ringi sektori AOC pöörlemisel ümber läigu OC.

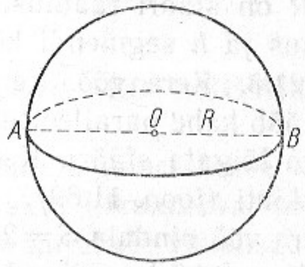
Pindala $S=\pi R(2h+r)$.

Ruumala $V=\frac{2}{3}\pi R^2h$,

kus (joon. 11.71) r on segmendi raadius, h segmendi kõrgus (DC) ja R kera raadius (OC).



Joon. 11.71



Joon. 11.72

11.21. SFÄÄR

11.21.1. Sfäär. Sfääriks nimetatakse pinda ruumis, mille kõik punktid on võrdsel kaugusel R ühest kindlast punktist O, mida nimetatakse sfääri **keskpunktiks**. Sfääri saame ka siis, kui laseme poolringjoonel pöörelda oma diameetri ümber. Seetõttu on sfäär **pöördpind**. Sfäär on kera pind (joon. 11.72).

Sfääri punktide kaugust R sfääri keskpunktist nimetatakse sfääri **raadiuseks**. Sfääri kaht punkti ühendavat

lõiku, mis läbib sfääri keskpunkti, nimetatakse sfääri **diameetriks** (AB).

Sfääri ja tasandi lõikejoont, kui tasand läbib sfääri keskpunkti, nimetatakse **suurringjooneks** (joon. 11.72). Sfääri iga kahte punkti läbib vaid üks suurringjoon. Kõiki teisi tasandi ja sfääri lõikejooni nimetatakse väikeringjoonteks (joon. 11.66).

Sfääri **pindala** (kera pinna pindala) võrdub suurringi neljakordse pindalaga:

$$S=4\pi R^2.$$

11.21.2. Sfääri segment. Sfääri segmendiks nimetatakse kera segmenti piiravat sfääri osa. Sfääri lõikav tasand jaotab sfääri kaheks segmendiks (joon. 11.67). Kui lõiketasand läbib sfääri keskpunkti, tekib kaks poolsfääri.

Sfääri segmendi **pindala** (joon. 11.68)

$$S=2\pi Rh=\pi(h^2+r^2),$$

kus R on sfääri raadius, r vastava kera segmendi põhja raadius ja h segmendi kõrgus.

11.21.3. Kera vöö. Kera vööks nimetatakse sfääri osa, mis jääb kahe paralleelse tasandi vahele, kui nende tasanditega lõigata sfääri. Kera vöö on sfääri osa, mis piirab kera kihti (joon. 11.69).

Kera vöö **pindala** $S=2\pi Rh$,
kus R on sfääri raadius ja h vastava kera kihi kõrgus.

11.22. RUUMINURK

Ruuminurgaks nimetatakse ruumi osa, mida piirab kooniline või püramiidiline pind. Koonilise ja püramiidilise pinna tippu nimetatakse ruuminurga **tipuks.**

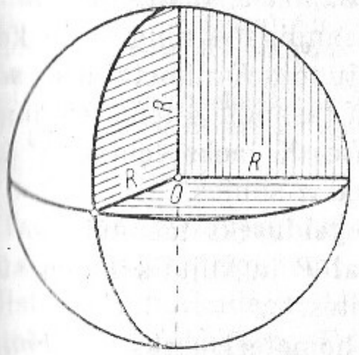
Kui ruuminurga tipp on sfääri keskpunktis, siis ruuminurgas sisalduva sfääriosa pindala ja sfääri raadiuse ruudu suhe ei sõltu sfääri raadiusest.

Sellele omadusele tugineb ruuminurkade mõõtmine.

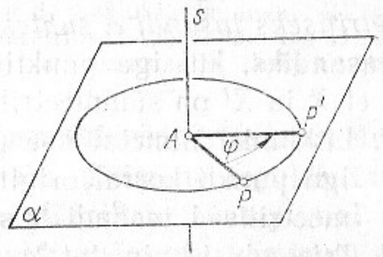
Ruuminurga ühikuks, mida nimetatakse **stereoradiaaniks** ehk **steradiaaniks**, on ruuminurk, milles sisalduv sfääriosa on pindalalt võrdne raadiuse ruuduga.

Näide. Leiame kolme paarikaupa ristuva tasapinnaga määratud ruuminurga suuruse. Kolme viirutatud tahuga kolmetahuline nurk (joon. 11.73) eraldab sfäärist $\frac{1}{8}$ osa, mille pindala on $\frac{4\pi R^2}{8}=\frac{\pi R^2}{2}$.

Vaadeldava ruuminurga suurus on $\frac{0{,}5\pi R^2}{R^2}=0{,}5\pi$ (steradiaani).



Joon. 11.73



Joon. 11.74

11.23. LIHTSAMAD TEISENDUSED RUUMIS

Ruumi üksühest kujutust iseendale nimetatakse *ruumi teisenduseks*. Teisendust nimetatakse **liikumiseks**, kui iga kahe punkti korral originaalide ja kujutiste vahelised kaugused on võrdsed. Kaht kujundit nimetatakse **kongruentseteks**, kui üks on saadav teisest liikumise teel.

Def. Liikumist nimetatakse **lükkeks**, kui ta säilitab iga sihi ja sihis valitud suuna.

Def. Liikumist nimetatakse **pöördeks ümber sirge** s *nurga* φ *võrra*, kui iga punkti korral originaal P ja kujutis P' asuvad ühel ja samal sirgega s ristuval tasandil ning nurk vektorist $\overrightarrow{AP}$ vektorini $\overrightarrow{AP'}$ on φ (joon. 11.74).

Nurka φ nimetatakse **pöördenurgaks** ja sirget s **pöördeteljeks.**

Punkte P ja Q nimetatakse *sümmeetrilisteks punkti* C *suhtes*, kui C on lõigu PQ keskpunkt. Kujundit K nimeta-

takse sümmeetriliseks punkti C suhtes ja punkti C tema **sümmeetriakeskpunktiks**, kui iga punkti $X \in K$ jaoks leidub $X' \in K$ nii, et X ja X' on sümmeetrilised C suhtes.

Def. Liikumist nimetatakse **peegelduseks punktist** C, kui iga punkti korral originaal P ja kujutis P' on sümmeetrilised punkti C suhtes.

Punkte P ja Q nimetatakse *sümmeetrilisteks tasandi α suhtes*, kui lõik PQ on risti tasandiga α ning tema keskpunkt asub sellel tasandil. Kujundit K nimetatakse *sümmeetriliseks tasandi α suhtes* ja tasandit α tema **sümmeetriatasandiks**, kui iga punkti $X \in K$ jaoks leidub $X' \in K$ nii, et X ja X' on sümmeetrilised α suhtes.

Def. Liikumist nimetatakse **peegelduseks tasandist** α, kui iga punkti korral originaal P ja kujutis P' on sümmeetrilised tasandi α suhtes.

Def. Teisendust nimetatakse **homoteetsuseks** *keskpunktiga C* ja *teguriga $k \neq 0$*, kui iga punkti P ja tema kujutise P' korral on rahuldatud tingimus $\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}$.

O m a d u s. Tasandi homoteetseks kujutiseks on paralleelne tasand.

Liikumise ja homoteetsuse järjestrakendamine (kompositsioon) on ühtlasi ruumi teisendus, mida nimetatakse **sarnasusteisenduseks.**

12. TRIGONOMEETRIA

12.1. TRIGONOMEETRIA

Sõna «trigonomeetria» tuleneb kreeka keelest (*trigōnon* — kolmnurk, *metreō* — mõõdan) ning tähendab õpetust kolmnurkade lahendamisest (art. 10.7.8.). Vajadus kolmnurkade lahendamise järele tekkis seoses astronoomia arenguga ning meresõidu ja maamõõtmisega. Esimesi trigonomeetriaalaseid ülesandeid arvatakse kuuluvat III aastatuhandesse e.m.a. Esimesed trigonomeetrilised tabelid koostas II sajandi keskel e.m.a. kreeka astronoom ja matemaatik Hipparchos (u. 190—125 e.m.a.).

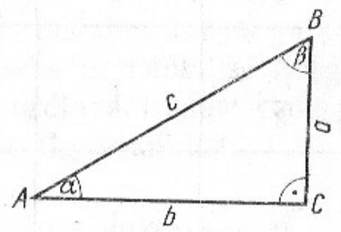
Trigonomeetria jaguneb tasandiliseks trigonomeetriaks ja sfääriliseks trigonomeetriaks. Esimene tegeleb tasandiliste kolmnurkadega, teine sfääriliste (kerapinnal asuvate) kolmnurkadega. Edaspidi mõtleme trigonomeetria all tasandilist trigonomeetriat.

12.2. TERAVNURGA SIINUS, KOOSINUS, TANGENS JA KOOTANGENS

12.2.1. **Definitsioonid.** Lähtudes täisnurksest kolmnurgast defineeritakse teravnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens järgmiselt (joon. 12.1).

Def. **Teravnurga siinuseks** nimetatakse vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$



Joon. 12.1

Def. **Teravnurga koosinuseks** nimetatakse lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet.

$$\cos\alpha=\frac{b}{c},\qquad \cos\beta=\frac{a}{c}.$$

Def. **Teravnurga tangensiks** nimetatakse vastaskaateti ja lähiskaateti suhet.

$$\tan\alpha=\frac{a}{b},\qquad \tan\beta=\frac{b}{a}.$$

Def. **Teravnurga kootangensiks** nimetatakse lähiskaateti ja vastaskaateti suhet.

$$\cot\alpha=\frac{b}{a},\qquad \cot\beta=\frac{a}{b}.$$

12.2.2. **Mõningate nurkade siinus, koosinus, tangens ja kootangens**

α	$0°=0$ rad	$30°=\frac{\pi}{6}$ rad	$45°=\frac{\pi}{4}$ rad	$60°=\frac{\pi}{3}$ rad	$90°=\frac{\pi}{2}$ rad
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	puudub
$\cot\alpha$	puudub	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

12.2.3. **Täiendusnurga valemid.** Teineteise täiendusnurkadeks nimetatakse nurki, mille summa on 90°. Täiendusnurkade siinuse ja koosinuse ning tangensi ja kootangensi vahelised seosed.

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(90°-\alpha)=\frac{1}{\tan\alpha}=\cot\alpha$$
$$\cot(90°-\alpha)=\frac{1}{\cot\alpha}=\tan\alpha.$$

Märkus. Valemid kehtivad suvalise nurga α korral.

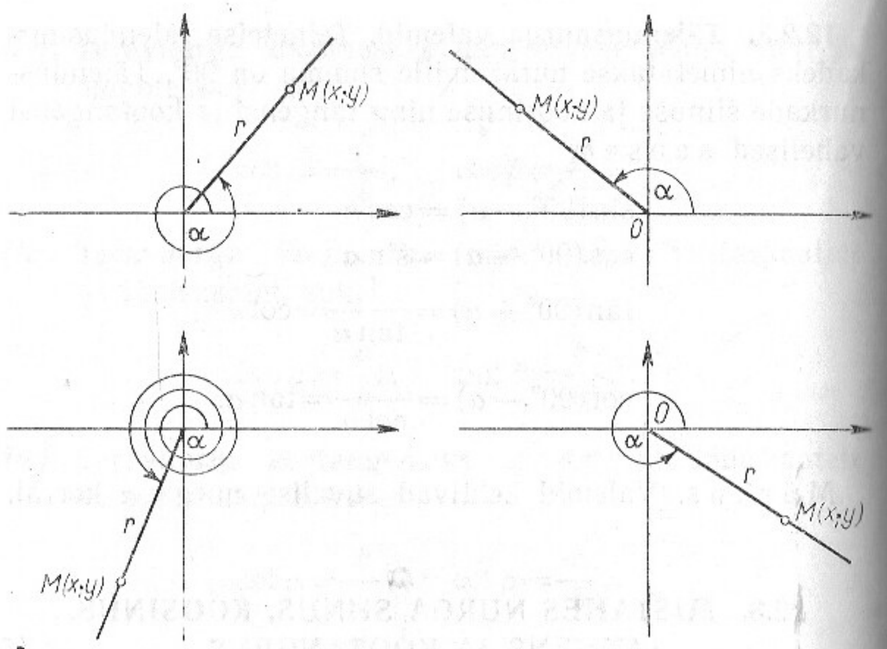
12.3. MISTAHES NURGA SIINUS, KOOSINUS, TANGENS JA KOOTANGENS

12.3.1. **Nurga mõiste** (vt. art. 10.5.1.). Trigonomeetrias mõistetakse nurga all esmajoones nurga suurust, nurga mõõtarvu. Seetõttu on otstarbekas kujutada nurka kui kiire pöörde suurust ümber oma alguspunkti.. Nurk on üle 360° (üle 2π rad), kui kiire pööre ületab täispöörde, ja negatiivne, kui kiir pöördub negatiivses suunas.

12.3.2. **Mistahes nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi definitsioonid.** Kui nurk on paigutatud koordinaatteljestikku nii, et nurga tipp ühtib koordinaatide alguspunktiga ning nurga alghaar x-telje positiivse suunaga (joon. 12.2), siis defineeritakse mistahes nurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens järgmiselt (sisuliselt laiendatakse artiklis 12.2.1. antud definitsioone teravnurga juhult mistahes nurga juhule).

Def. **Nurga siinuseks** nimetatakse nurga lõpphaara mistahes punkti ordinaadi suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist.

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$



Joon. 12.2

Def. **Nurga koosinuseks** nimetatakse nurga lõpphaara mistahes punkti abstsissi suhet selle punkti kaugusesse koordinaatide alguspunktist.

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}.$$

Def. **Nurga tangensiks** nimetatakse nurga lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja abstsissi suhet, kui abstsiss ei ole null.

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}, \quad \text{kui} \quad \alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Def. **Nurga kootangensiks** nimetatakse nurga lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja ordinaadi suhet, kui ordinaat ei ole null.

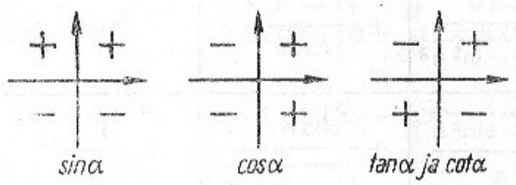
$$\cot\alpha=\frac{x}{y}, \quad \text{kui} \quad \alpha\neq n\pi, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Märkus. Nurga lõpphaara mistahes punkti M võib asendada nurga lõpphaaral asetseva vektoriga $\overrightarrow{OM}=(X;\ Y)$, mille pikkus on r.

Venekeelses kirjanduses esinevad $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ asemel sümbolid $\operatorname{tg}\alpha$ ja $\operatorname{ctg}\alpha$.

12.4. NURGA SIINUSE, KOOSINUSE, TANGENSI JA KOOTANGENSI MÄRGI SÕLTUVUS NURGA VEERANDIST

See on skemaatiliselt kujutatud joonisel 12.3.



Joon. 12.3

12.5. SEOSED ÜHE JA SAMA NURGA SIINUSE, KOOSINUSE, TANGENSI JA KOOTANGENSI VAHEL

12.5.1. Trigonomeetria põhivalemid ja nende järeldused

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \tan\alpha\cot\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Põhivalemiteks peetakse tavaliselt esimeses tulbas olevaid valemeid.

12.5.2. Nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi avaldamine ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide kaudu

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

Märk «+» või «—» võetakse tabelis esitatud valemite korral vastavalt sellele, milline on võrduse vasakul pool oleva trigonomeetrilise funktsiooni märk nurga α korral.

12.6. TAANDAMISVALEMID

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad$ $\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad$ $\tan(\alpha+n\pi)=\tan\alpha$

$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ $\quad$ $\cot(\alpha+n\pi)=\cot\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\quad$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$ $\quad$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\quad$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$ $\quad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ $\quad$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\quad$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$ $\quad$ $\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

Märkused. 1. Taandamisvalemeid kasutatakse tavaliselt teravnurga α korral, kuid nad kehtivad ka suvalise nurga korral.

2. Taandamisvalemeid aitab meeles pidada järgmine reegel. **1.** Kui «taandamine» toimub nurga $\frac{\pi}{2}$ või $\frac{3\pi}{2}$ suhtes, asendub valemis siinus koosinusega, tangens kootangensiga ning vastupidi. Ülejäänud juhtudel valemis esinev funktsioon ei muutu. **2.** Märk («+» või «—») võrduse paremal pool oleva funktsiooni ees ühtib võrduse vasakul poolel oleva trigonomeetrilise funktsiooni märgiga selles veerandis, kuhu kuulub antud (s. o. taandamata) nurk. Nurka α peetakse märgi määramisel teravnurgaks.

12.7. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE SIINUS, KOOSINUS, TANGENS JA KOOTANGENS

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

12.8. KORDSE NURGA SIINUS, KOOSINUS, TANGENS JA KOOTANGENS

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \qquad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$
$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$
$$\cot 3\alpha=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1}$$

12.9. POOLNURGA SIINUS, KOOSINUS, TANGENS JA KOOTANGENS

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Märkus. Märk «+» või «—» võetakse vastavalt sellele, milline on võrduse vasakul poolel oleva trigonomeetrilise funktsiooni märk nurga $\frac{\alpha}{2}$ korral.

12.10. NURGA SIINUSE, KOOSINUSE, TANGENSI JA KOOTANGENSI AVALDAMINE POOLNURGA TANGENSI KAUDU

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cot\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

12.11. SIINUSTE, KOOSINUSTE, TANGENSITE JA KOOTANGENSITE SUMMA JA VAHE TEISENDAMINE KORRUTISEKS

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

12.12. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE KORRUTISE TEISENDAMISE VALEMID

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\cot\alpha\cot\beta=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

$$\tan\alpha\cot\beta=\frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+$$
$$+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+$$
$$+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$$

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$$

13. VEKTORALGEBRA

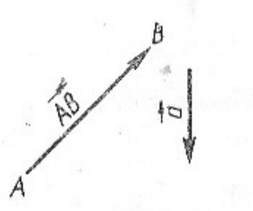
13.1. VEKTORID

13.1.1. Skalaarsed ja vektoriaalsed suurused. Matemaatikas, füüsikas jm. kasutatavad suurused jaotatakse kahte suurde klassi. Ühtesid neist iseloomustab mingi kindel arv (näiteks pikkus, mass, vanus). Niisuguseid suurusi nimetatakse **skalaarseteks suurusteks** ehk **skalaarideks**. Nimetus tuleneb sõnast «skaala», sest nende suuruste väärtusi saab kujutada teataval skaalal. Peale selle kasutatakse suurusi, mida iseloomustab lisaks arvulisele väljendusele ka fikseeritud suund (näiteks lüke, jõud, impulss, kiirus). Selliseid suurusi nimetatakse **vektoriaalseteks suurusteks.**

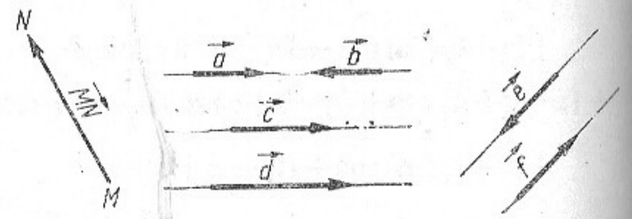
13.1.2. Vektori mõiste. Vektoriks nimetatakse suunaga lõiku. Termin *vektor* tuleneb ladinakeelsest sõnast *vector* — vedaja.

Vektori üht otspunkti nimetatakse tema **algus-** ehk **rakenduspunktiks** ja teist **lõpp-punktiks.** Viimast näitab vektori sümbolina kasutatava noole teravik (joon. 13.1). Vektorit tähistatakse kas üheainsa tähega või kahe suure tähega, mille kohal on nool, näiteks $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$. Viimasel juhul esimene täht tähistab vektori alguspunkti ja teine lõpp-punkti.

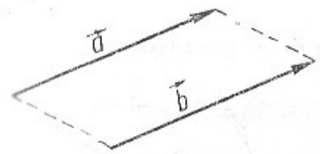
Vektori kui suunatud lõigu **pikkuseks** nimetatakse selle



Joon. 13.1



Joon. 13.2



Joon. 13.3

Joon. 13.4

lõigu pikkust. Vektori $\vec{a}$ pikkust märgitakse sümboliga $|\vec{a}|$ või a, vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkust sümboliga $|\overrightarrow{AB}|$, AB või $|AB|$.

Vektoreid, mis asuvad kas ühel ja samal sirgel või siis paralleelsetel sirgetel, nimetatakse **kollineaarseteks** (joon. 13.2). Kollineaarsetel vektoritel on seega ühesugune siht, kuid suund võib neil olla ka vastupidine. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kollineaarsust tähistatakse sümboliga $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Vektoreid nimetatakse **võrdseiks**, kui nad on kollineaarsed, samasuunalised ja võrdse pikkusega. Võrdsed vektorid võivad erineda vaid alguspunkti poolest (joon. 13.3).

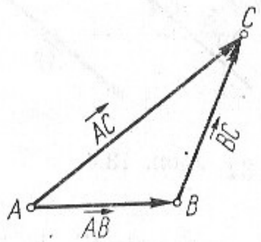
Kaht kollineaarset vektorit, millel on ühesugune pikkus, kuid mis on vastassuunalised, nimetatakse **vastandvektoreiks**. Vektori $\vec{a}$ vastandvektorit tähistatakse sümboliga $-\vec{a}$ ning vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektorit sümboliga $-\overrightarrow{AB}$ või $\overrightarrow{BA}$ (joon. 13.4).

Vektorit, mille pikkus on 0, nimetatakse **nullvektoriks** ja tähistatakse sümboliga $\vec{0}$.

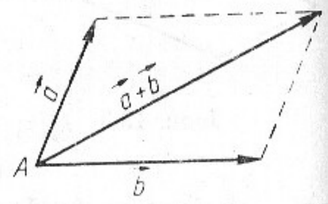
Vektorit, mille pikkus on 1, nimetatakse **ühikvektoriks.**

13.1.3. Vektorite liitmine. Vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ **summana** mõistetakse vektorit $\overrightarrow{AC}$ (joon. 13.5). Vektorite summa leidmiseks kasutatakse kas kolmnurga- või temaga samaväärset rööpkülikureeglit.

Kolmnurgareegel: kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa leidmiseks joonestame mingist punktist A esmalt vektori



Joon. 13.5



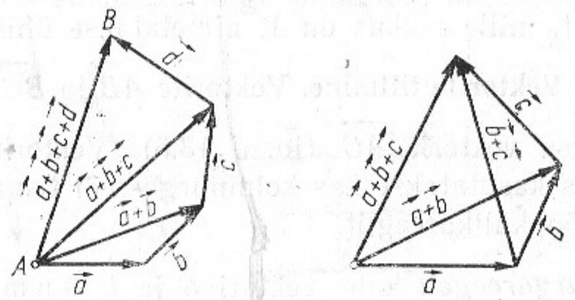
Joon. 13.6

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ning siis selle lõpp-punktist B vektori $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Ühendades punktid A ja C, saame vektori $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Rööpkülikureegel: kui joonestame liidetavad vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ühisest alguspunktist A, siis neile vektoritele ehitatud rööpküliku diagonaalvektor alguspunktiga A on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa (joon. 13.6).

Kolmnurgareegli alusel saab liita ka rohkem kui kaht vektorit (joon. 13.7). Sellest tuleneb nn. ***hulknurgareegel:***

mitme vektori summa leidmisel joonestame mingist punktist A ühe liidetava, selle lõpp-punktist teise liidetava, viimase lõpp-punktist kolmanda jne. Nende vektorite summaks on siis punktist A viimase liidetava lõpp-punkti B suunduv vektor $\overrightarrow{AB}$ (joon. 13.7).



Joon. 13.7

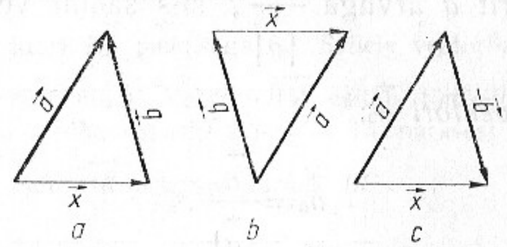
Vektorite summa o m a d u s e d.

1. *Summa kommutatiivsus*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. *Summa assotsiatiivsus*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (joon. 13.7).

13.1.14. Vektorite lahutamine. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheks $\vec{a}-\vec{b}$ nimetatakse vektorit $\vec{x}$, mille korral $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$ (joon. 13.8, *a*).

Kolmnurgareegel: kahe vektori vaheks $\vec{a}-\vec{b}$ on vektori $\vec{b}$ lõpp-punktist vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti suunduv vektor, kui vektoritel $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ühine alguspunkt (joon. 13.8, *b*).



Joon. 13.8

Vektorite vahe leidmisel kasutatakse järgmist o m a d u s t (joon. 13.8, *c*).

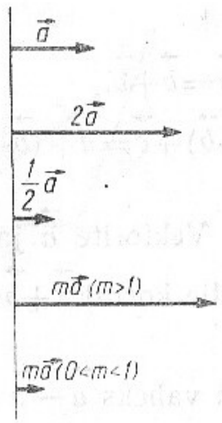
Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahe on võrdne vektori $\vec{a}$ ja vektori $\vec{b}$ vastandvektori $-\vec{b}$ summaga, s. t. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

13.1.5. Vektori korrutamine arvuga. Vektori $\vec{a}$ ja arvu m korrutiseks $\overrightarrow{ma}$ nimetatakse vektorit pikkusega $|m||\vec{a}|$, mis on vektoriga $\vec{a}$ kollineaarne ning

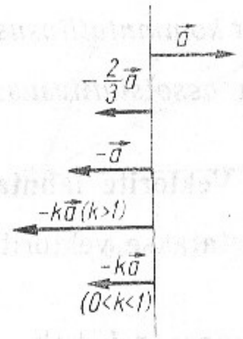
1) samasuunaline, kui $m>0$ (joon. 13.9),

2) vastassuunaline, kui $m<0$ (joon. 13.10, $-k=m$).

Vektori $\vec{a}$ ja arvu 0 korrutis on nullvektor $\vec{0}$. Kui korru-



Joon. 13.9



Joon. 13.10

tame vektorit $\vec{a}$ arvuga $\dfrac{1}{|\vec{a}|}$, siis saame vektori $\vec{a}$ *suunalise ühikvektori* $\vec{a}_0$:

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

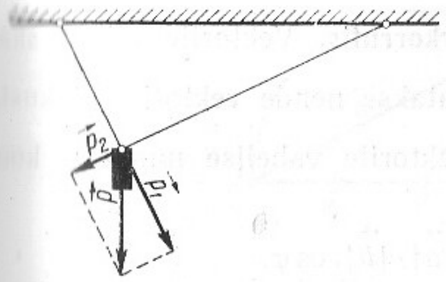
Omadused.

1. *Assotsiatiivsus arvuteguri suhtes*: $m(l\vec{a})=(ml)\vec{a}$.
2. *Distributiivsus arvude liitmise suhtes*: $(l+m)\vec{a}=l\vec{a}+m\vec{a}$.
3. *Distributiivsus vektorite liitmise suhtes*:

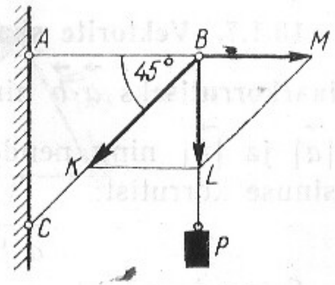
$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}.$$

13.1.6. Vektori lahutamine komponentideks. Antud vektori esitamist teiste (etteantud omadustega) vektorite summana nimetatakse *vektori lahutamiseks komponentideks*.

Näiteid. 1. Olgu raskus $\vec{p}$ riputatud kahe nööri külge (joon. 13.11). Leida tõmbejõud kummaski nööris.



Joon. 13.11



Joon. 13.12

Joonestame vektorile $\vec{p}$ kui diagonaalile rööpküliku. Selle rööpküliku külgedena saamegi otsitavad tõmbejõud $\vec{p}_1$ ja $\vec{p}_2$.

2. Olgu seinale kinnitatud kronsteini ABC (joon. 13.12) külge riputatud raskus $P=50$ kgf. Leida tõmme vardas AB ja surve vardas BC.

Joonestame vektori $\overrightarrow{BL}$ pikkusega 50. Sellele vektorile kui diagonaalile ehitame rööpküliku. Vektor $\overrightarrow{BM}$ esitab tõmbejõudu vardas AB. Et $\triangle LMB$ on võrdhaarne, siis $BM=50$. Täisnurksest kolmnurgast KLB leiame survejõu $\overrightarrow{BK}$ suuruse vardas BC:

$$BK=\sqrt{BL^2+KL^2}=\sqrt{50^2+50^2}=50\sqrt{2}\approx 70{,}5\text{kgf}.$$

Olgu $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ mittekollineaarsed nullist erinevad vektorid. Kui $\vec{s}=s_1\vec{p}+s_2\vec{q}$ ja $\vec{t}=t_1\vec{p}+t_2\vec{q}$, siis öeldakse, et vektorid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ on **samarihilised**.

Olgu $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ nullist erinevad vektorid. Sel juhul iga vektorit $\vec{v}$ on võimalik esitada

1) kujul $\vec{v}=k\vec{a}$, kui $\vec{a}$ on vektoriga $\vec{v}$ samasihiline,

2) kujul $\vec{v}=k\vec{a}+l\vec{b}$, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on vektoriga $\vec{v}$ samarihilised,

3) kujul $\vec{v}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$, kui $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on mittekomplanaarsed.

13.1.7. Vektorite skalaarkorrutis. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **skalaarkorrutiseks** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ nimetatakse nende vektorite pikkuste $|\vec{a}|$ ja $|\vec{b}|$ ning nende vektorite vahelise nurga φ koosinuse korrutist:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Omadusi.

1. *Kommutatiivsus*: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. *Distributiivsus*: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$.
4. $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
5. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$.
6. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$.
7. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$.
8. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
9. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
10. Kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kumbki nullvektorid, siis tingimus $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ on tarvilik ja piisav selleks, et $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Märkus. Mõnel juhul defineeritakse, et nullvektor on risti iga vektoriga. Sel juhul viimane omadus esitub kujul

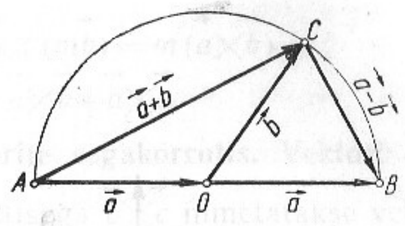
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

Näide. Tõestada, et diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk (Thales'i *teoreem*).

Tähistame $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}$ ja $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ (joon. 13.13). Sel juhul $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ ja $\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$. Arvutades saame, et

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0,$$

kuna $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Sellest järeldubki, et vektorid $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ on risti.



Joon. 13.13

Suurust $\vec{a}\cdot\vec{a}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ **skalaarruuduks.** Teades skalaarruutu, saab vektori pikkuse leida valemiga

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

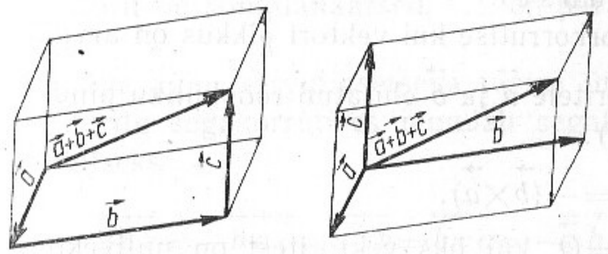
13.1.8. Vektorite vektorkorrutis. Vaadeldes vektoreid kui suunatud lõike ruumis, võime ülalkäsitletud operatsioone (liitmine, lahutamine, korrutamine arvuga, lahutamine komponentideks ja skalaarkorrutise leidmine) teha ka ruumivektoritega. Liitmisel tuleb vaid rööpküliku asemel vaadelda rööptahukat (joon. 13.14).

Ruumivektorite jaoks defineeritakse veel nn. vektorkorrutis.

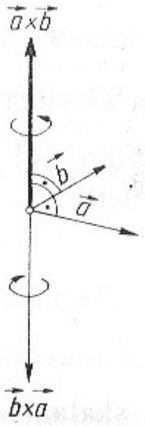
Olgu antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning nendevaheline nurk φ.

Vektorkorrutiseks $\vec{a}\times\vec{b}$ nimetatakse vektorit $\vec{v}$, mille

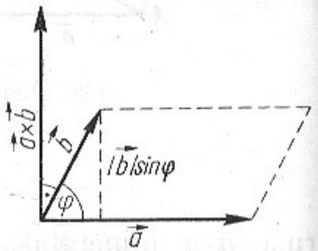
1) pikkus on võrdne korrutisega $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$,



Joon. 13.14



Joon. 13.15



Joon. 13.16

2) siht on risti mõlema vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ sihtidega (vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ määratud tasandiga);
3) suund on selline, et parema käe pöidla ja esimese sõrme seadmisel vastavalt vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ suundadesse näitab peopesa poole pööratud keskmine sõrm vektori $\vec{v}$ suunda (joon. 13.15).

Vektorkorrutise suuna määramise reeglit nimetatakse ***parema käe reegliks,*** mida võib meeles pidada ka järgmises sõnastuses: vektorkorrutise suunaks on parema käe kruvi liikumise suund, kui kruvi pead pöörata nurga võrra, mis on väiksem kui 180° ja mis on mõõdetud vektorist $\vec{a}$ vektorini $\vec{b}$.

O m a d u s e d.

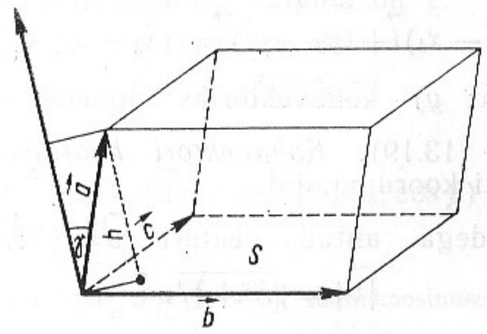
1. Vektorkorrutise kui vektori pikkus on arvuliselt võrdne vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindalaga (joon. 13.16).
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.
3. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}$, kui üks vektoritest on nullvektor või $\vec{a}\parallel\vec{b}$.
4. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$, kui $\vec{a}\perp\vec{b}$.

5. $(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$.
6. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

13.1.9. Vektorite segakorrutis. Vektori $\vec{a}$ skalaarkorrutist vektorkorrutisega $\vec{b}\times\vec{c}$ nimetatakse vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ **segakorrutiseks** ning tähistatakse sümboliga $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. Seega

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Ruumi kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutis on skalaarne suurus, mille absoluutväärtus on arvuliselt võrdne neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga (joon. 13.17).



Joon. 13.17

Kui $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$, siis kas üks vektoritest on nullvektor või need kolm vektorit on **komplanaarsed,** s. t. on paralleelsed ühe tasandiga.

O m a d u s. Iga kahe kõrvutiasetseva teguri ümberpaigutamine vektorite segakorrutises muudab segakorrutise märgi vastupidiseks:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}.$$

13.2. VEKTORI KOORDINAADID

13.2.1. Tasandi vektori koordinaadid. Koordinaattelgede suunalised **ühikvektorid** $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ (joon. 13.18) moodustavad **vektorbaasi** (täpsemalt **ristbaasi**) tasandil. Iga vektor $\vec{v}$ avaldub kujul $\vec{v}=X\vec{i}+Y\vec{j}$, kus arvud X ja Y on üheselt määratud. Neid arve X ja Y nimetatakse **vektori $\vec{v}$ koordinaatideks** (täpsemalt ristkoordinaatideks) antud vektorbaasi suhtes ning kirjutatakse $\vec{v}=(X;\ Y)$.

Punkte $A(x_1;\ y_1)$ ja $B(x_2;\ y_2)$ ühendava vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid võrduvad vektori lõpp-punkti ja alguspunkti vastavate koordinaatide vahega, s. t. x_2-x_1 ja y_2-y_1. Sümboleis:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1).$$

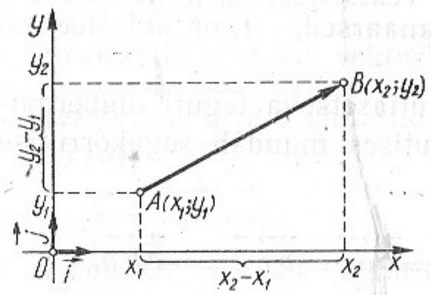
Punkti $P(x;\ y)$ **kohavektoriks** nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ (joon. 13.19). *Kohavektori koordinaatideks* on vastava punkti koordinaadid.

Koordinaatidega antud **vektori** $\vec{v}=(X;\ Y)$ **pikkus**

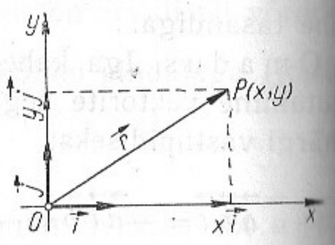
$$|\vec{v}|=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Suurusi

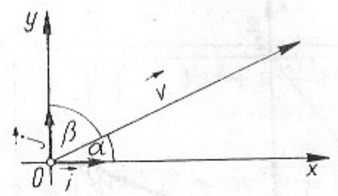
$$\cos\alpha=\frac{X}{|\vec{v}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$



Joon. 13.18



Joon. 13.19



Joon. 13.20

$$\cos\beta=\frac{Y}{|\vec{v}|}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

nimetatakse vektori $\vec{v}=(X;\ Y)$ **suunakoosinusteks,** sest nad määravad selle vektori suuna (joon. 13.20).

Suunakoosinuste ruutude summa on 1:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1.$$

Vektor $\vec{v}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta=(\cos\alpha;\cos\beta)$ on vektori $\vec{v}$ suunaline ühikvektor.

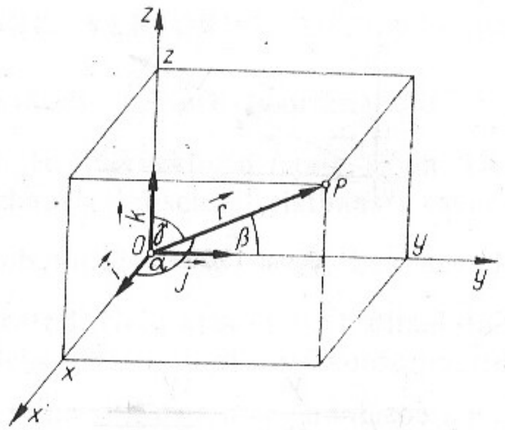
Näide. Leida vektori $\vec{a}=(2;\ -3)$ suunakoosinused. Et

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13},$$

siis vektori $\vec{a}$ suunakoosinused on

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}\quad\text{ja}\quad\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

13.2.2. Ruumi vektori koordinaadid. Koordinaattelgede suunalised **ühikvektorid** $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ (joon. 13.21) moodustavad **vektorbaasi** (täpsemalt **ristbaasi**) ruumis. Iga vektor $\vec{v}$ ruumis on esitatav ühesel viisil kujul $\vec{v}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$. Arve



Joon. 13.21

X, Y ja Z nimetatakse **vektori $\vec{v}$ ristkoordinaatideks** ning märgitakse $\vec{v}=(X; Y; Z)$.

Punkte $A(x_1; y_1; z_1)$ ja $B(x_2; y_2; z_2)$ ühendava vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid võrduvad vektori lõpp-punkti ja algus-punkti vastavate koordinaatide vahedega:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Punkti $P(x; y; z)$ **kohavektoriks** nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$, mille koordinaatideks on vastava punkti P koordinaadid (joon. 13.21).

Vektori $\vec{r}=(x; y; z)$ **pikkus**

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Analoogiliselt tasandi juhuga määratakse nurkade α, β ja γ (joon. 13.21) koosinused:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

kusjuures kehtib seos

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Suurusi $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ nimetatakse vektori $\vec{r}$ **suunakoosinusteks.** Vektor

$$\vec{r}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$$

on vektori $\vec{r}$ suunaline ühikvektor.

Näide. Leida vektori $\vec{a}=(2; 1; -2)$ suunaline ühikvektor.

Et

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{4+1+4}=3,$$

siis

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{1}{3}\quad \text{ja}\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Seega vektori $\vec{a}$ suunaliseks ühikvektoriks on vektor

$$\vec{a}_0=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}=\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right).$$

13.2.3. **Vektorite liitmine, lahutamine ja arvuga korrutamine koordinaatides.** Olgu $\vec{a}=(X_1; Y_1; Z_1)$ ja $\vec{b}=(X_2; Y_2; Z_2)$. Siis

$$\vec{a}+\vec{b}=(X_1+X_2;\ Y_1+Y_2;\ Z_1+Z_2),$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(X_1-X_2;\ Y_1-Y_2;\ Z_1-Z_2),$$

$$m\vec{a}=(mX_1;\ mY_1;\ mZ_1).$$

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **kollineaarsuse tunnus:**

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Märkus. Nendest valemitest saame vastavad valemid tasandi vektorite jaoks, kuid vektorite kolmandad koordinaadid võtame võrdseks nulliga.

13.2.4. Vektorite skalaarkorrutis koordinaatides. Vektorite $\vec{a}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ja $\vec{b}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$ **skalaarkorrutis**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \qquad (1)$$

Näide. On antud kolmnurga tipud $A(2;\ 0;\ -1)$, $B(-3;\ 1;\ 1)$ ja $C(0;\ -2;\ 1)$. Leida nurk β tipu B juures (joon. 13.22).

Leiame vektorid $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ ning nende vahelise nurga koosinuse vektorite skalaarkorrutise abil. Niisiis,

$$\overrightarrow{BA}=(2-(-3);\ 0-1;\ -1-1)=(5;\ -1;\ -2);$$

$$\overrightarrow{BC}=(0-(-3);\ -2-1;\ 1-1)=(3;\ -3;\ 0)$$

ning

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5\cdot3+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot0=18.$$

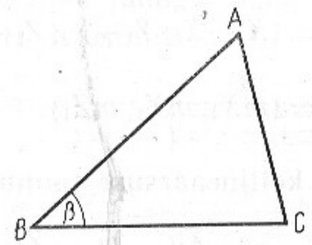
Seega

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{18}{\sqrt{25+1+4}\cdot\sqrt{9+9+0}}=\frac{18}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{18}}=$$

$$=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{18}{30}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

ning

$$\beta=\arccos\sqrt{\frac{3}{5}}\approx39°14'.$$



Joon. 13.22

Vektorite $\vec{a}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ja $\vec{b}=(X_2;\ Y_2\ Z_2)$ **ristseisu tunnus:**

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \qquad (2)$$

Märkus. Seostest (1) ja (2) saame vastavad seosed tasandi vektorite jaoks, kui võtame vektorite kolmandad koordinaadid võrdseks nulliga.

Näide. Leida vektorite $\vec{a}=(-1;\ 2)$ ja $\vec{b}=(3;\ 4)$ vaheline nurk.

Et $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, kus φ on nurk vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahel, siis

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Et $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ja $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot3+2\cdot4=-3+8=5$, siis

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ning

$$\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\approx63°26'.$$

Märkus. Tasandi vektorite $\vec{a}=(X_1;\ Y_1)$ ja $\vec{b}=(X_2;\ Y_2)$ ristseisu tunnust $X_1X_2+Y_1Y_2=0$ kasutades on kerge leida vektorit, mis oleks risti vektoriga $\vec{r}=(X;\ Y)$. Selleks on vektor $\vec{r}_1=(Y;\ -X)$ või $\vec{r}_2=(-Y;\ X)$, sest $\vec{r}\cdot\vec{r}_1=-XY-YX=0$ ja $\vec{r}\cdot\vec{r}_2=-XY+YX=0$.

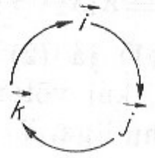
13.2.5. Vektorite vektorkorrutis koordinaatides

Vektorite $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$ ja $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$ vektorkorrutise saab leida kui hulkliikmete korrutise, arvestades järgmisi seoseid:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k},$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}.$$



Joon. 13.23

Viimast kolme seost on kerge meeles pidada, kasutades joonisel 13.23 esitatud ringi. See võimaldab anda baasivektori vektorkorrutise leidmiseks järgmise *reegli*:

kui liikuda mööda ringjoont esimese teguri juurest teise juurde kellaosuti liikumise suunas, siis on korrutiseks kolmas baasivektor, kui liikuda vastupidiselt kellaosuti liikumise suunale, siis on korrutiseks kolmanda baasivektori vastandvektor.

Näide. Leiame vektorite $\vec{a}=(4;\ -3;\ 1)$ ja $\vec{b}=(0;\ 2;\ -4)$ vektorkorrutise.

Kirjutame antud vektorid baasivektorite kaudu ja korrutame:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})\times(2\vec{j}-4\vec{k})=4\cdot 2\vec{i}\times\vec{j}-4\cdot 4\vec{i}\times\vec{k}-$$
$$-3\cdot 2\vec{j}\times\vec{j}+3\cdot 4\vec{j}\times\vec{k}+2\vec{k}\times\vec{j}-4\vec{k}\times\vec{k}=$$
$$=8\vec{k}+16\vec{j}+0+12\vec{i}-2\vec{i}+0=10\vec{i}+16\vec{j}+8\vec{k}.$$

Lihtsam on leida vektorkorrutist, kasutades kolmandat järku determinandi mõistet. Nimelt, vektorite $\vec{a}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ja $\vec{b}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$ **vektorkorrutis** avaldub valemiga

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

Näide. Leiame eelmises näites toodud vektorkorrutise viimatiesitatud valemi abil.

Kasutame Sarruse reeglit (art. 5.10.2.):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & 1\\ 0 & 2 & -4\end{vmatrix}=12\vec{i}+8\vec{k}-2\vec{i}+16\vec{j}=10\vec{i}+16\vec{j}+8\vec{k}.$$

Märkus. Kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ asuvad xy-tasandil, s. t. $\vec{a}=(X_1;\ Y_1;\ 0)$ ja $\vec{b}=(X_2;\ Y_2;\ 0)$, siis saame mõnevõrra lihtsama valemi:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

13.2.6. Vektorite segakorrutis koordinaatides. Koordinaatidega määratud vektorite $\vec{a}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$, $\vec{b}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$ ja $\vec{c}=(X_3;\ Y_3;\ Z_3)$ **segakorrutis**

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.$$

Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ **komplanaarsuse tunnus** on viimase determinandi võrdumine nulliga.

Näide. Kontrollida, kas vektorid $\vec{a}=(1;\ 0;\ -1)$, $\vec{b}=(2;\ -2;\ 0)$ ja $\vec{c}=(2;\ -1;\ 1)$ on komplanaarsed.

Et komplanaarsete vektorite segakorrutis on 0, siis arvutame segakorrutise:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2+2-4=-4\neq 0.$$

Seega need vektorid ei ole komplanaarsed.

13.3. ÜLDIST VEKTORITEST

13.3.1. Ajaloost. Vektoreid kasutati kahe eri sihis toimiva jõu koosmõju uurimisel juba XVII sajandil. Selgus, et neid jõude tuleb liita rööpkülikureegli alusel. Umbes samal ajal leiti, et ka erisuunalised kiirused liituvad rööpkülikureegli järgi. Vektori mõiste laial-

dasema kasutamise võimalusi näitasid XIX sajandi keskel (1844) teineteisest sõltumatult kaks teadlast, inglane W. R. Hamilton (1805—1865) ja sakslane H. Grassmann (1809—1877). Esimesena käsitles vektorarvutust geomeetriliselt (aastail 1881—1884 peetud loenguis) ameerika füüsik J. W. Gibbs (1839—1903).

13.3.2. Vektoralgebra. Vektorite hulk ja selles defineeritud tehted (liitmine, lahutamine, arvuga korrutamine jne.) moodustavad teatava algebralise struktuuri — **vektoralgebra.** Olenevalt tehete arvust saame erinevate omadustega algebralise struktuuri. Üheks eriti laialt kasutatavaks on selline algebraline struktuur, milles vaadeldakse vaid kaht tehet, liitmist ja arvuga korrutamist. Sel juhul kõneldakse vektorite lineaaralgebrast.

13.3.3. Vektorruum. Vektorite hulka, milles on defineeritud summa ja arvuga korrutamine, nimetatakse **vektorruumiks** ehk **lineaarseks ruumiks.** Ruumi punktideks on sel juhul vektorid.

Kõige vahetum samm üldistuse suunas on vaadelda vektorina n arvust koosnevat järjestatud hulka $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Sel viisil tekib nn. ***n*-dimensionaalne vektorruum.**

Matemaatika edasine areng on aga läinud veelgi suurema abstraktsiooni suunas. Vektorruumi mõiste andmisel ei konkretiseerita objekte, vaid määratakse need seosed, mida vastavad objektid (ruumi punktid) peavad rahuldama. Nüüdisaegses matemaatikas defineeritakse vektorruum järgmiselt.

Hulka X nimetatakse **vektorruumiks** üle korpuse K (näit. üle reaalarvude hulga **R**), kui on täidetud järgmised tingimused:

1) iga kahe elemendi $x, y \in X$ korral on defineeritud summa $x+y \in X$;
2) iga $x \in X$ ja iga $\alpha \in K$ puhul on defineeritud korrutis $\alpha x \in X$;
3) $x+y=y+x$;
4) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
5) hulgas X leidub niisugune element 0, et iga $x \in X$ korral $x+0=x$;

6) iga $x \in X$ korral leidub element $-x \in X$, et $x+(-x)=0$;
7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
8) $1 \cdot x=x$;
9) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
10) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

Hulga X elemente nimetatakse vektoriteks ning korpuse K elemente skalaarideks.

Näiteid (K — reaalarvude korpus R).
1. Tasandi vektorite hulk on vektorruum.
2. Ruumi vektorite hulk on vektorruum.
3. Kõigi jadade hulk on vektorruum.
4. Kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk on vektorruum.

14. ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

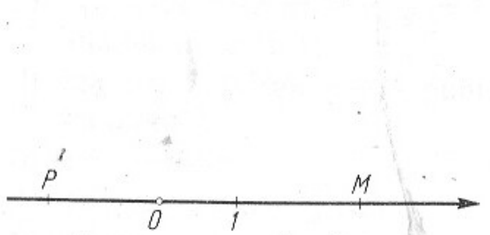
14.1. KOORDINAATIDE MEETOD

Süstemaatiline koordinaatide meetodi käsitlus pärineb prantsuse matemaatikuilt P. Fermat'lt (1601—1665) ja R. Descartes'ilt (1596—1650). Koordinaatide meetodi olemus seisneb selles, et geomeetriliste objektide (punkt, vektor jne.) käsitlemine taandatakse opereerimisele arvudega (koordinaatidega).

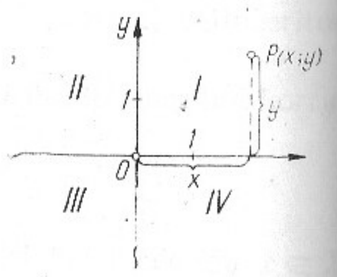
14.1.1. Punkti koordinaat sirgel. Antud sirge punkti seostamiseks arvudega fikseeritakse sellel sirgel mingi punkt O, mida nimetatakse **nullpunktiks**, seejärel määratakse **positiivne suund** ning **ühik** (joon. 14.1). **Punkti M koordinaadiks** nimetatakse lõigu OM pikkust (positiivne arv), kui see punkt asub nullpunktist positiivses suunas. Kui punkt P asub negatiivses suunas, siis on punkti P koordinaadiks negatiivne arv, mille absoluutväärtus on lõigu OP pikkus.

Kui punktide A ja B koordinaadid on vastavalt x_1 ja x_2, siis **lõigu AB pikkus** on $|x_1 - x_2|$ ning **lõigu keskpunkti koordinaat** on $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

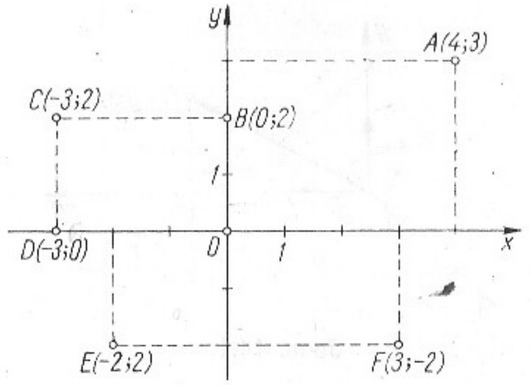
14.1.2. Koordinaadid tasandil määratakse kõige sagedamini kahe ristuva sirge abil, mis jagavad tasandi nel-



Joon. 14.1



Joon. 14.2



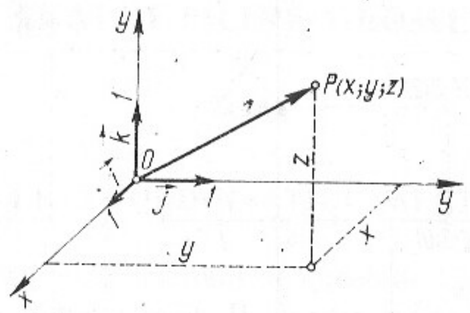
Joon. 14.3

jaks veerandiks (joon. 14.2). Enamasti võetakse üks neist sirgetest rõhtsana. Nendel sirgetel määratakse positiivsed suunad ja ühikud ning võetakse kummagi sirge nullpunktiks nende sirgete lõikepunkt O (lad. *origo* — algus). Neid suundade ja mõõtühikutega varustatud sirgeid nimetatakse **koordinaattelgedeks**. Rõhttelje **(abstsisstelje)** positiivseks suunaks võetakse tavaliselt suund paremale. Püsttelje **(ordinaattelje)** positiivne suund valitakse nii, et abstsisstelje pööramisel 90° võrra vastupidi kellaosuti liikumisele mõlema telje positiivsed suunad ühtiksid. Kõige sagedamini tähistatakse abstsisstelge sümboliga x ja nimetatakse **x-teljeks,** ordinaattelge aga sümboliga y, nimetades teda **y-teljeks.** Selliste telgedega varustatud tasandit nimetatakse **koordinaattasandiks**, täpsemalt **xy-tasandiks.**

Iga punktiga P sellel koordinaattasandil (joon. 14.2 ja 14.3) seotakse reaalarvude paar $(x; y)$. Neid arve x ja y nimetatakse **punkti P koordinaatideks,** arvu x esimeseks koordinaadiks ehk **abstsissiks** ja arvu y teiseks koordinaadiks ehk **ordinaadiks.**

Et punkti P koordinaadid on x ja y, märgitakse sümboliga $P(x; y)$.

Ristkoordinaadid tasandil võib määrata ühe punkti (O — nullpunkt) ja kahe ristuva ühikvektoriga (nn. **reeperiga**), mis määravad koordinaatteljed koos suundade



Joon. 14.4

ja ühikutega. Vaadeldava punkti koordinaatideks on sel juhul punkti kohavektori koordinaadid (art. 13.2.1.).

14.1.3. Koordinaadid ruumis määratakse ühe punkti (O — nullpunkt) ja kolme omavahel paarikaupa ristuva ühikvektoriga (nn. **reeperiga**). Vaadeldava punkti P koordinaatideks (joon. 14.4) loetakse selle punkti kohavektori $\overrightarrow{OP}$ koordinaate (art. 13.2.2.).

Et punkti P koordinaadid on x, y ja z, märgitakse sümboliga $P(x; y; z)$.

Esimest koordinaati nimetatakse **abstsissiks**, teist **ordinaadiks** ning kolmandat **aplikaadiks.**

14.2. ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA TASANDIL

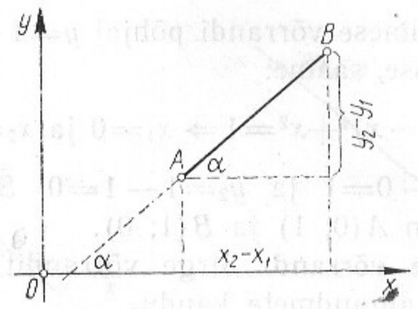
14.2.1. Lõigu pikkus ja keskpunkt. Punktide $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$ vaheline kaugus ehk neid ühendava **lõigu pikkus**

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Selle **lõigu keskpunkti koordinaadid on**

$$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$$

Nurka α (joon. 14.5) nimetatakse **sirglõigu** AB **tõusunurgaks** ning suurust



Joon. 14.5

$$m=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

selle **sirglõigu tõusuks.**

Sama suurust m nimetatakse ka punktidega A ja B määratud **sirge tõusuks** ja nurka α **sirge tõusunurgaks.**

14.2.2. Joone võrrand. Joone L võrrandiks ristkoordinaatides nimetatakse niisugust kahe muutujaga (x ja y) võrrandit $F(x; y)=0$, mida rahuldavad joone L kõikide punktide ristkoordinaadid ja ainult need. *Joon loetakse antuks*, kui on antud vastav võrrand.

N ä i d e 1. Leida sellise ringjoone võrrand, mille keskpunkt asub punktis O ja raadius on 1.

Arvestades ringjoone definitsiooni ja kauguse valemit, saame, et kõik selle ringjoone punktid $(x; y)$ peavad rahuldama seost

ehk
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=1$$
$$x^2+y^2=1.$$

See ongi vaadeldava ringjoone võrrand, sest iga seda võrrandit rahuldav punkt $(x; y)$ asub antud ringjoonel.

N ä i d e 2. Leida võrranditega $x+y=1$ ja $x^2+y^2=1$ määratud joonte lõikepunktid.

Otsitavate lõikepunktide koordinaadid peavad rahuldama mõlemat võrrandit, s. t. peavad olema võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

lahendeiks. Esimese võrrandi põhjal $y=1-x$. Asendades teise võrrandisse, saame:

$$(1-x)^2+x^2=1 \Rightarrow x_1=0 \text{ ja } x_2=1,$$

millest $y_1=1-0=1$ ja $y_2=1-1=0$. Seega otsitavad lõikepunktid on $A(0;\ 1)$ ja $B(1;\ 0)$.

14.2.3. Sirge võrrand. Sirge võrrandit saab määrata mitmesuguste algandmete kaudu.

1. *Sirge tõusu ja algordinaadi kaudu:*

$$y=mx+b.$$

Suurust $m=\tan\alpha$ nimetatakse sirge **tõusuks** ja arvu b **algordinaadiks** (joon. 14.6).

2. *Sirge telglõikude kaudu:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

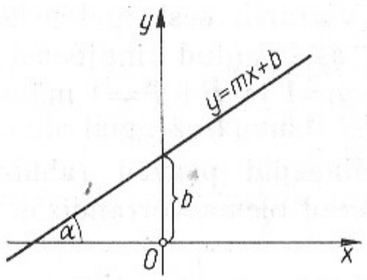
Arve a ja b nimetatakse antud sirge **telglõikudeks** (joon. 14.7).

3. *Sirge ühe punkti ja tõusu kaudu:*

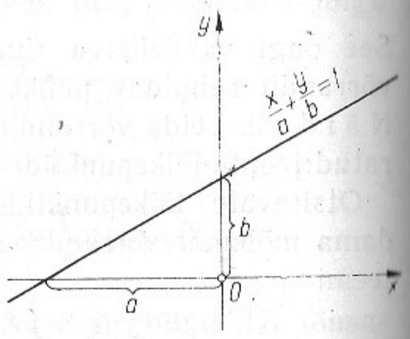
$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \text{(joon. 14.8)}$$

4. *Sirge kahe punkti kaudu:*

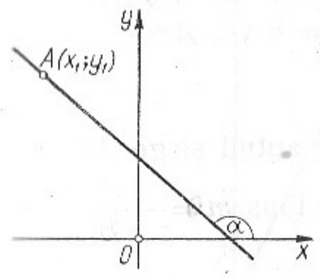
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \text{(joon. 14.9).}$$



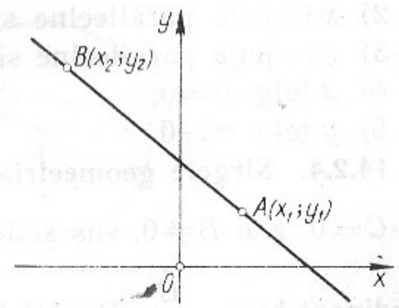
Joon. 14.6



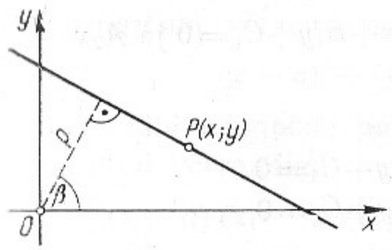
Joon. 14.7



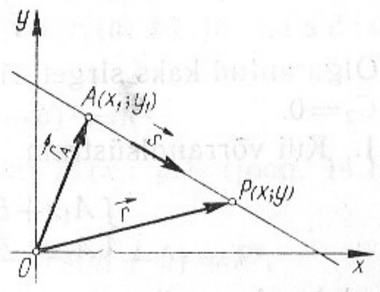
Joon. 14.8



Joon. 14.9



Joon. 14.10



Joon. 14.11

5. *Sirge normaalvõrrand:*

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0,$$

kus p on sirge kaugus koordinaatide alguspunktist (joon. 14.10).

6. *Sirge üldvõrrand.* Iga võrrand kujul

$$Ax+By+C=0, \quad \textit{kus} \quad A,\ B,\ C \text{ on konstandid,}$$

on sirge võrrandiks ja vastupidi, iga sirge on esitatav niisuguse võrrandiga.

7. *Sirge vektorvõrrand* (joon. 14.11):

$$\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{s} \text{ ehk } \begin{cases} x=x_1+ts_1 \\ x=x_2+ts_2 \end{cases}, \text{ kus } \vec{s}=(s_1;\ s_2).$$

Mõningaid spetsiifilisi sirgeid:

1) nullpunkti läbiv sirge: $y=mx$ või $Ax+By=0$;

2) x-teljega paralleelne sirge: $y=b$ või $By+C=0$;
3) y-teljega paralleelne sirge: $x=a$ või $Ax+C=0$;
4) x-telg: $y=0$;
5) y-telg: $x=0$.

14.2.4. Sirgete geomeetria. Olgu antud sirge $Ax+By+C=0$. Kui $B\neq 0$, siis selle sirge tõus $m=-\frac{A}{B}$ ja algordinaat $b=-\frac{C}{B}$. Punkti $P(x_1; y_1)$ **kaugus** sellest **sirgest**

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Olgu antud kaks sirget: $A_1x+B_1y+C_1=0$ ja $A_2x+B_2y+C_2=0$.

1. Kui võrrandisüsteem

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

on lahenduv, siis sirged lõikuvad ning selle süsteemi lahend $(x_0; y_0)$ on nende **sirgete lõikepunkt.**

2. **Sirged ühtivad**, kui $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

3. **Sirged on paralleelsed** siis ja ainult siis, kui $A_1B_2-A_2B_1=0$, s. t. nende sirgete tõusud on võrdsed.

4. **Sirged on risti** siis ja ainult siis, kui $A_1A_2+B_1B_2=0$.

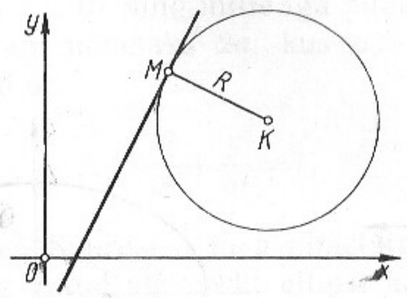
5. **Sirgete vahelise teravnurga tangens**

$$\tan\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|.$$

Märkus. Kui võtta $B_1=B_2=-1$, $A_1=m_1$, $A_2=m_2$, $C_1=b_1$ ja $C_2=b_2$, siis saame vastavad seosed tõusude ja algordinaatidega antud sirgete $y=m_1x+b_1$ ja $y=m_2x+b_2$ jaoks.

14.2.5. Ringjoone võrrand. Kui ringjoone keskpunkt asub nullpunktis ja raadius on R, siis selle **ringjoone võrrand** on

$$x^2+y^2=R^2.$$



Joon. 14.12

Kui ringjoone keskpunkt on $K(a; b)$ ja raadius R, siis **ringjoone võrrand** on

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Puutuja läbi ringjoone **punkti** $M(x_1; y_1)$ (joon. 14.12) on määratud võrrandiga

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2,$$

kui keskpunkt K asub nullpunktis, siis võrrandiga

$$x_1x+y_1y=R^2.$$

Kahe tundmatuga teise astme võrrand

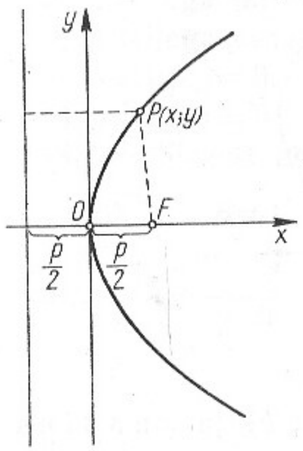
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

on ringjoone võrrandiks siis ja ainult siis, kui $A=C$, $B=0$, $D^2+E^2-AF>0$. Seejuures keskpunkt $K=\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{A}\right)$ ja raadius $R=\frac{1}{|A|}\sqrt{D^2+E^2-AF}$.

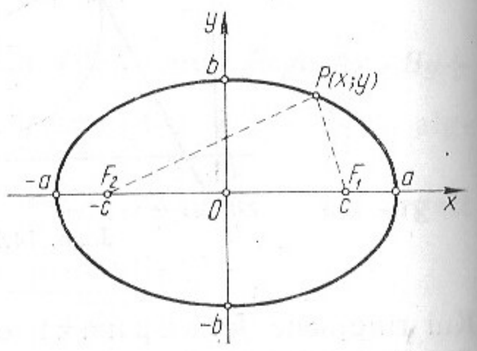
14.2.6. Parabooli võrrand. Parabooliks nimetatakse joont, mille iga punkt asub võrdsel kaugusel ühest kindlast punktist (**fookusest**) ja ühest kindlast sirgest (**juhtjoonest**).

Kui juhtjooneks on sirge $x=-\frac{p}{2}$ ja fookuseks punkt $F=\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, siis parabooli võrrand on

$$y^2=2px.$$



Joon. 14.13



Joon. 14.14

Seda võrrandit nimetatakse **parabooli kanooniliseks võrrandiks**. Joonisel 14.13 on kujutatud vastav parabool juhul, kus $p>0$. Kui $p<0$, siis parabooli harud on suunatud vasakule.

Võrrandiga $y^2=2px$ määratud parabool on sümmeetriline x-telje suhtes. Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse **parabooli teljeks** ja selle lõikepunkti parabooliga parabooli **haripunktiks**. Antud juhul on haripunktiks nullpunkt.

Kõik paraboolid, mille telg on paralleelne x-teljega, esituvad võrrandiga

$$x=Ay^2+By+C.$$

Selle parabooli haripunkt on $S\left(\frac{4AC-B^2}{4A}; -\frac{B}{2A}\right)$.

Kõik paraboolid, mille telg on paralleelne y-teljega, esituvad võrrandiga

$$y=ax^2+bx+c,$$

kusjuures haripunkt on $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

14.2.7. Ellipsi võrrand. Ellipsiks nimetatakse tasandilist joont, mille iga punkti kaugused kahest etteantud punktist (**fookustest**) annavad konstantse summa.

Vaatleme ellipsit, mille fookused asuvad punktides

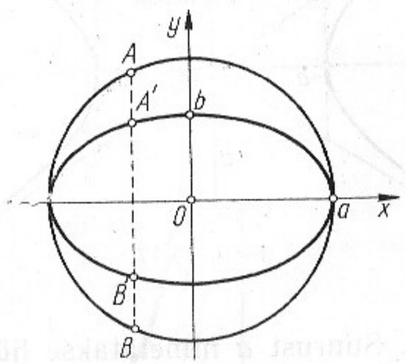
$F_1(c; 0)$ ja $F_2(-c; 0)$ ning mille iga punkti kaugused fookustest annavad summaks $2a$, kus $a>c$ (joon. 14.14). **Ellipsi võrrand** on

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

kus $b^2=a^2-c^2$. Suurusi a ja b nimetatakse **ellipsi pooltelgedeks** ning antud võrrandit **ellipsi kanooniliseks võrrandiks.** Ellipsiga piiratud kujundi pindala

$$S=\pi ab.$$

Kanoonilise võrrandiga määratud ellips on joon, mis saadakse ringjoonest $x^2+y^2=a^2$ tasandi kokkusurumisel x-telje suhtes teguri $m=\frac{b}{a}$ kordselt (joon. 14.15).

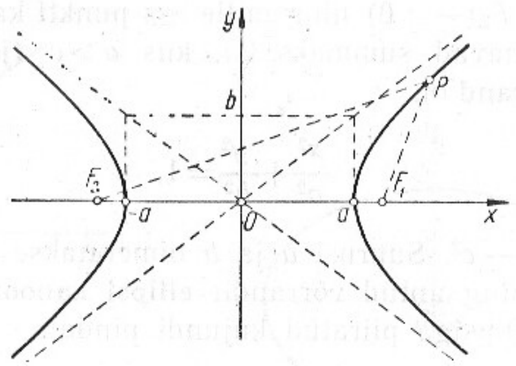


Joon. 14.15

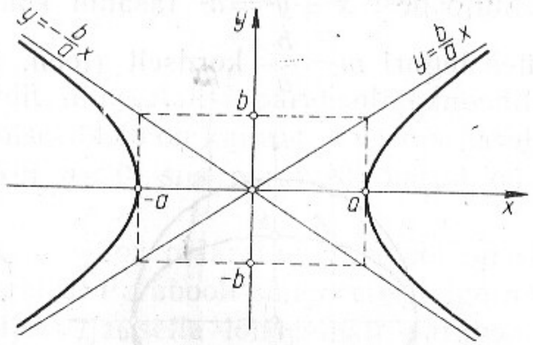
14.2.8. Hüperbooli võrrand. Hüperbooliks nimetatakse tasandilist joont, mille iga punkti kaugused kahest etteantud punktist (**fookustest**) annavad konstantse vahe.

Vaatleme hüperbooli, mille fookused asuvad punktides $F_1(c; 0)$ ja $F_2(-c; 0)$ ning mille iga punkti kaugused fookustest annavad vaheks $2a$, kus $a<c$ (joon. 14.16). **Hüperbooli võrrand** on

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$



Joon. 14.16

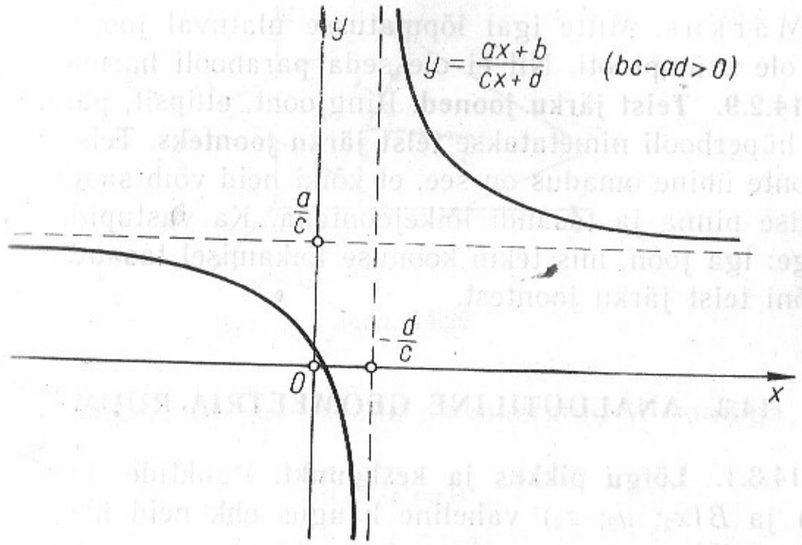


Joon. 14.17

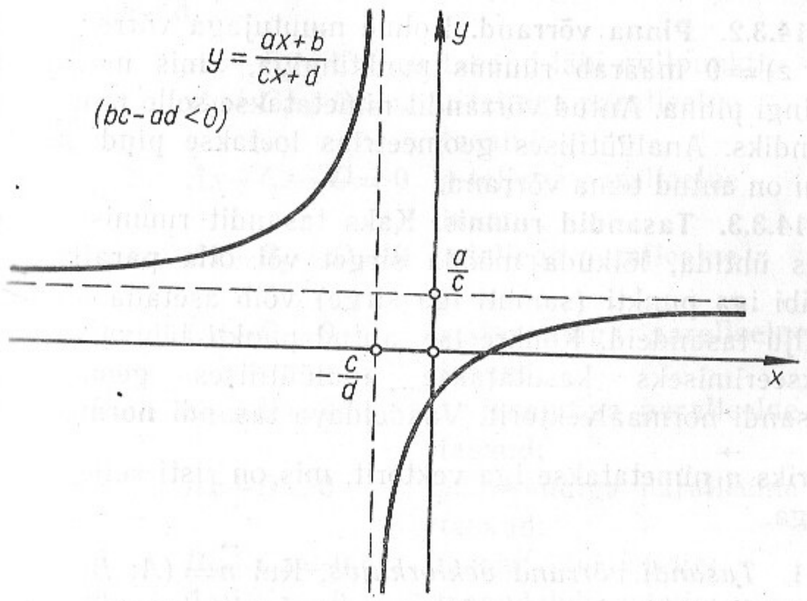
kus $b^2=c^2-a^2$. Suurust a nimetatakse **hüperbooli reaalseks poolteljeks** ja suurust b **imaginaarseks poolteljeks.**

Joone lõpmatusse ulatuva haru puhul võib leiduda sirge (nagu see on hüperboolil), millele joone sellel harul tõkestamatult eemalduv punkt lõpmatult läheneb. Niisugust sirget nimetatakse vaadeldava joone **asümptoodiks.** Hüperbooli asümptootideks on sirged $y=\frac{b}{a}x$ ja $y=-\frac{b}{a}x$ (joon. 14.17).

Iga murdlineaarse funktsiooni $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ($c\neq 0$) graafik on mingi hüperbool, mille asümptoodid ristuvad (joon. 14.18 ja 14.19).



Joon. 14.18



Joon. 14.19

Märkus. Mitte igal lõpmatusse ulatuval joone harul ei ole asümptooti. Nii ei ole seda parabooli harudel.

14.2.9. Teist järku jooned. Ringjoont, ellipsit, parabooli ja hüperbooli nimetatakse **teist järku joonteks.** Teist järku joonte ühine omadus on see, et kõiki neid võib saada koonilise pinna ja tasandi lõikejoontena. Ka vastupidine on õige: iga joon, mis tekib koonuse lõikamisel tasandiga on mõni teist järku joontest.

14.3. ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA RUUMIS

14.3.1. Lõigu pikkus ja keskpunkt. Punktide $A(x_1; y_1; z_1)$ ja $B(x_2; y_2; z_2)$ vaheline kaugus ehk neid ühendava **lõigu pikkus**

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

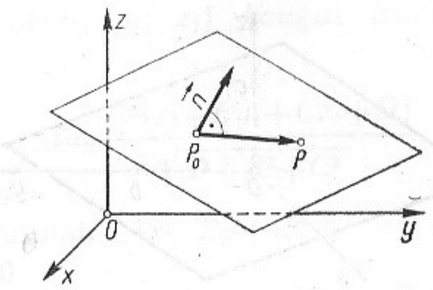
Selle **lõigu keskpunkti koordinaadid** on:

$$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2); \quad y_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2); \quad z_0=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

14.3.2. Pinna võrrand. Kolme muutujaga võrrand $F(x; y; z)=0$ määrab ruumis punktihulga, mis moodustab mingi pinna. Antud võrrandit nimetatakse selle pinna võrrandiks. Analüütilises geomeetrias loetakse pind antuks, kui on antud tema võrrand.

14.3.3. Tasandid ruumis. Kaks tasandit ruumis võivad kas ühtida, lõikuda mööda sirget või olla paralleelsed. Läbi iga punkti (samuti iga sirge) võib asetada lõpmata palju tasandeid. Konkreetse, antud punkti läbiva tasandi fikseerimiseks kasutatakse analüütilises geomeetrias tasandi normaalvektorit. Vaadeldava tasandi **normaalvektoriks** $\vec{n}$ nimetatakse iga vektorit, mis on risti selle tasandiga.

1. *Tasandi võrrand vektorkujus.* Kui $\vec{n}=(A; B; C)$ on tasandi normaalvektor, $P_0(x_0; y_0; z_0)$ selle tasandi fikseeritud punkt ning $P(x; y; z)$ tasandi suvaline punkt



Joon. 14.20

(joon. 14.20), siis see tasand on määratud võrrandiga

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

ehk

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

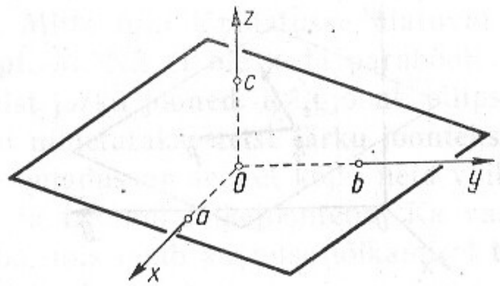
2. *Tasandi üldvõrrand.* Iga võrrand kujul

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

kus A, B, C ja D on konstandid, on tasandi võrrandiks ja vastupidi, iga tasand on määratud niisuguse võrrandiga.

Erijuhud:

$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	tasand läbi nullpunkti;
$A=0$	$By+Cz+D=0$	x-teljega paralleelne tasand;
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	y-teljega paralleelne tasand;
$C=0$	$Ax+By+D=0$	z-teljega paralleelne tasand;
$A=B=0$	$Cz+D=0$	xy-tasandiga paralleelne tasand;
$A=C=0$	$By+D=0$	xz-tasandiga paralleelne tasand;
$B=C=0$	$Ax+D=0$	yz-tasandiga paralleelne tasand;
$A=D=0$	$By+Cz=0$	tasand läbi x-telje;
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	tasand läbi y-telje;
$C=D=0$	$Ax+By=0$	tasand läbi z-telje;



Joon. 14.21

$A=B=D=0$ $\quad Cz=0$ $\quad$ xy-tasand;
$A=C=D=0$ $\quad By=0$ $\quad$ xz-tasand;
$B=C=D=0$ $\quad Ax=0$ $\quad$ yz-tasand.

3. *Tasandi võrrand telglõikude kaudu:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \text{(joon. 14.21)}.$$

Näide. Leida punktid, kus tasand $9x-2y+6z+18=0$ lõikab koordinaattelgi.

Esitame antud võrrandi telglõikudes. Selleks viime vabaliikme paremale poole ja jagame võrrandit arvuga -18. Saame

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{9}+\frac{z}{-3}=1.$$

Seega antud tasand lõikab x-telge punktis -2, y-telge punktis 9 ja z-telge punktis -3.

4. *Tasandi normaalvõrrand:*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

kus $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ on tasandi normaalvektori suunakoosinused (art. 13.2.2.) ja p on tasandi kaugus nullpunktist.

5. *Kolme punkti* $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$ ja $P_3(x_3; y_3; z_3)$ *läbiva tasandi võrrand:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

6. *Punkti* $M(x_1; y_1; z_1)$ *kaugus tasandist* $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7. *Kahe tasandi* $Ax+By+Cz+D=0$ ja $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

paralleelsuse tunnus: $\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{B}{B_1}=\dfrac{C}{C_1}$;

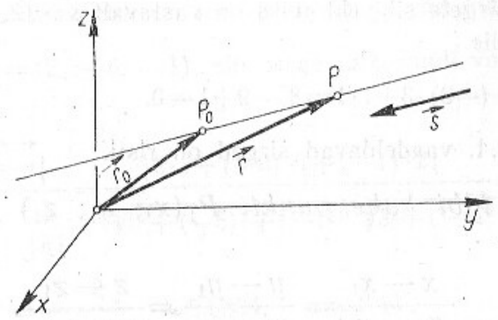
ristseisu tunnus: $AA_1+BB_1+CC_1=0$.

8. *Kahe lõikuva tasandi vaheline nurk* φ:

$$\cos\varphi=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

14.3.4. Sirged ruumis. Ruumi kaks sirget võivad olla ühtivad, paralleelsed, lõikuvad (neil juhtudel asuvad nad ühel tasandil) või kiivsed (sel juhul ei asu nad ühel tasandil). Läbi iga punkti võib asetada lõpmata palju sirgeid. Et fikseerida konkreetne sirge, mis läbib antud punkti, kasutatakse analüütilises geomeetrias sirge sihivektori mõistet. Sirge **sihivektoriks** nimetatakse iga vektorit, mille siht langeb kokku antud sirge sihiga.

Olgu $\vec{s}=(s_1; s_2; s_3)$ vaadeldava sirge sihivektor, $P_0(x_0; y_0; z_0)$ selle sirge fikseeritud punkt ja $P(x; y; z)$ sirge suvaline punkt (joon. 14.22). Siis saab sirget esitada järgmiste võrranditega.



Joon. 14.22

1. *Sirge võrrand vektorkujus*:

$$\overrightarrow{P_0P}=\vec{ts} \quad \text{ehk} \quad \vec{r}=\vec{r_0}+\vec{ts},$$

kus t on suvalisi reaalarvulisi väärtusi omandav parameeter.

2. *Sirge parameetrilised võrrandid*:

$$x=x_0+ts_1,\ y=y_0+ts_2,\ z=z_0+ts_3.$$

3. *Sirge kanoonilised võrrandid*:

$$\frac{x-x_0}{s_1}=\frac{y-y_0}{s_2}=\frac{z-z_0}{s_3}.$$

4. *Sirge* on määratav ka *kui kahe tasandi lõikejoon*:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0. \end{cases}$$

Selle *sirge sihivektor* on

$$\vec{s}=\left(\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\right).$$

Kahe sirge vaheline nurk määratakse nende sirgete sihivektorite vahelise nurgana vektorite skalaarkorrutisest.

Näide. Kas sirged

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z}{1} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+7}{1}$$

on risti?

Et nende sirgete sihivektoreiks on vastavalt $\vec{s}=(2;\ -3;\ 1)$ ja $\vec{u}=(4;\ 3;\ 1)$, siis

$$\vec{s}\cdot\vec{u}=2\cdot4+(-3)\cdot3+1\cdot1=8-9+1=0.$$

Seega $\vec{s}\perp\vec{u}$, s. t. vaadeldavad sirged on risti.

5. *Sirge läbi kahe punkti* $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

14.3.5. Tasandid ja sirged. Sirge ja tasand ruumis kas lõikuvad, on paralleelsed või sirge asetseb tasandil.

1. *Sirge* sihivektoriga $\vec{s}$ ja *tasand* normaalvektoriga $\vec{n}$ *lõikuvad*, kui vektorid $\vec{s}$ ja $\vec{n}$ ei ole risti, s. t. $\vec{s}\cdot\vec{n}\neq0$.

2. Antud *sirge* on *risti* vaadeldava *tasandiga*, kui $\vec{s}\parallel\vec{n}$.

3. *Sirge ja tasandi vaheline nurk* α on määratav seosest

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}.$$

Näide. Leida tasandi $3x+y+2z-5=0$ ja sirge $\frac{x+1}{2}=-\frac{y}{6}=1-z$ lõikepunkt ja nende vaheline nurk.

Esitame sirge võrrandi kujul

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z-1}{-1}=t, \tag{1}$$

millest $x=2t-1$, $y=-6t$ ja $z=-t+1$.

Asendus tasandi võrrandisse annab, et

$3(2t-1)+(-6t)+2(-t+1)-5=0$, $-2t-6=0$, $t=-3$.

Lõikepunkti koordinaatideks saame

$x_0=2\cdot(-3)-1=-7$, $y_0=-6\cdot(-3)=18$, $z_0=-(-3)+1=4$.

Seega lõikepunkt on $A(-7;\ 18;\ 4)$.

Et tasandi normaalvektor on $\vec{n}=(3;\ 1;\ 2)$ ja võrrandi (1) põhjal sirge sihivektor $\vec{s}=(2;\ -6;\ -1)$, siis sirge ja tasandi vahelise nurga α leiame valemist

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|2\cdot3+(-6)\cdot1+(-1)\cdot2|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+(-1)^2}\ \sqrt{3^2+1^2+2^2}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{14}}\approx0{,}0834, \quad \alpha\approx4°46'.$$

4. *Sirge on paralleelne tasandiga*, kui sirge sihivektor ja tasandi normaalvektor on omavahel risti, s. t. $\vec{n} \perp \vec{s}$ ehk $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$.

5. *Sirge asub* vaadeldaval *tasandil*, kui ta on sellega paralleelne ja tal on tasandiga vähemalt üks ühine punkt.

14.3.6. Sfääri võrrand. Sfääriks nimetatakse ruumi nende punktide hulka, mis on antud punktist K antud kaugusel R. Seejuures nimetatakse reaalarvu R **sfääri raadiuseks** ja punkti K **keskpunktiks.**

Kui keskpunkt on $K(a; b; c)$, siis ***sfääri võrrand*** esitub kujul

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Kui $A(x_1; y_1; z_1)$ on sfääri punkt, siis läbi selle punkti võetud **puutujatasandi** võrrand on:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)+(z_1-c)(z-c)=R^2.$$

Kui sfääri keskpunktiks on nullpunkt, siis sfäär on määratud võrrandiga

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Kolme tundmatuga teise astme võrrand

$$A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+E=0,\ A\neq 0,$$

on sfääri võrrandiks, kui $B^2+C^2+D^2>4AE$, kusjuures selle sfääri keskpunkt on

$$K\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{C}{2A}; -\frac{D}{2A}\right)$$

ja raadius

$$R=\frac{1}{2A}\sqrt{B^2+C^2+D^2-4AE}.$$

15. ELEMENTAARFUNKTSIOONID

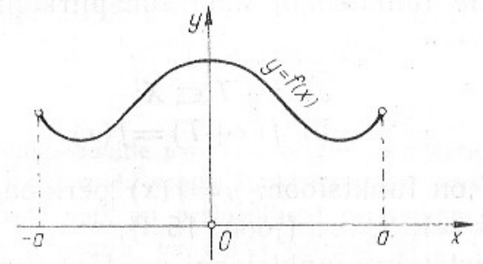
15.1. ÜLDISED MÕISTED

15.1.1. Paarisfunktsioonid. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **paarisfunktsiooniks,** kui argumendi iga väärtuse x korral selle funktsiooni määramispiirkonnast X kehtivad seosed:

a) $-x \in X$;
b) $f(-x)=f(x)$.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes (joon. 15.1).

Näiteid. Funktsioonid $y=C$, $y=x^2$, $y=\cos x$ ja $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ on paarisfunktsioonid.

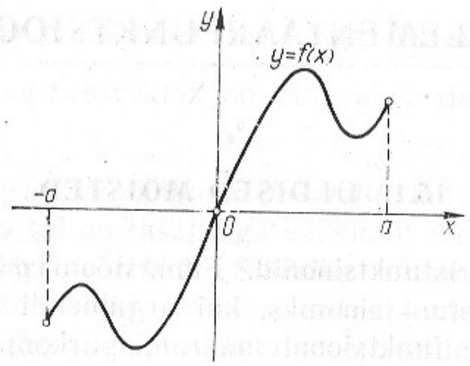


Joon. 15.1

15.1.2. Paaritud funktsioonid. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **paarituks funktsiooniks,** kui argumendi iga väärtuse x korral selle funktsiooni määramispiirkonnast X kehtivad seosed:

a) $-x \in X$;
b) $f(-x)=-f(x)$.

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes (joon. 15.2).



Joon. 15.2

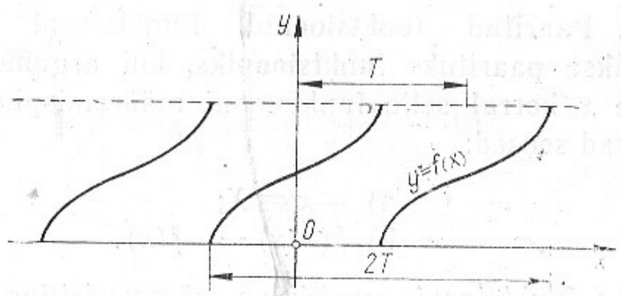
Näiteid. Funktsioonid $y=x$, $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ on paaritud.

15.1.3. Perioodilised funktsioonid. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **perioodiliseks**, kui leidub niisugune nullist erinev reaalarv T **(periood)**, et argumendi iga väärtuse x korral selle funktsiooni määramispiirkonnast X kehtivad seosed:

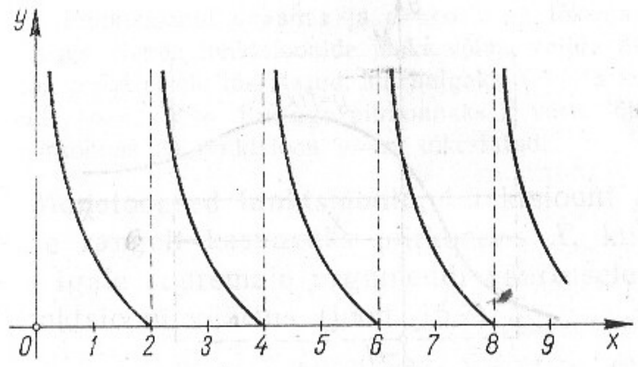
$$\text{a)}\ x+T\in X;$$
$$\text{b)}\ f(x+T)=f(x)$$

Kui arv T on funktsiooni $y=f(x)$ periood, siis on seda ka kT, kus $k=1, 2, \ldots$ (joon. 15.3).

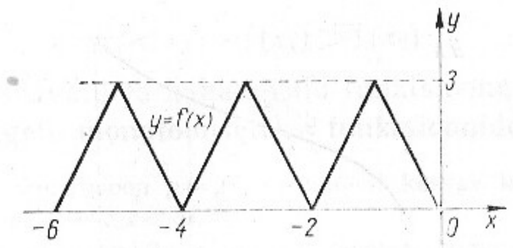
Sageli mõistetakse funktsiooni $y=f(x)$ **perioodina** absoluutväärtuselt vähimat arvu T, mille korral on rahuldatud seosed a) ja b).



Joon. 15.3



Joon. 15.4



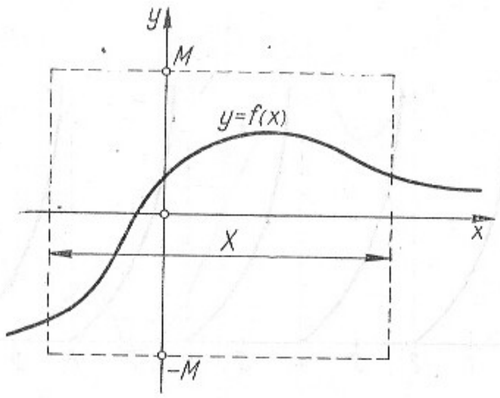
Joon. 15.5

Näiteid. 1. Funktsioonide $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ periood on 2π.
2. Kõik funktsioonid, mida saame funktsioonidest $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ aritmeetiliste tehete abil, on perioodilised perioodiga 2π.
3. Funktsioonide $y=\tan x$, $y=\sin 2x$ periood on π.
4. Joonisel 15.4 toodud funktsiooni määramispiirkond on poolsirge $]0; \infty[$ ning periood arv 2.
5. Joonisel 15.5 on esitatud funktsioon, mille määramispiirkond on poolsirge $]-\infty; 0]$ ning periood arv -2.

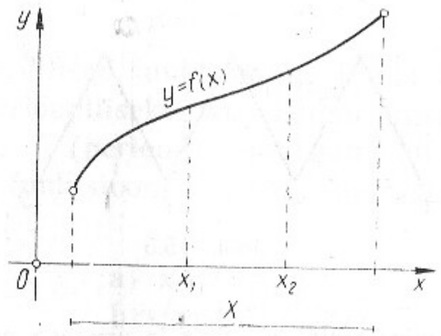
15.1.4. Tõkestatud funktsioonid. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **tõkestatuks piirkonnas** X, kui leidub niisugune reaalarv $M\geqslant 0$, et iga $x\in X$ korral kehtib võrratus (joon. 15.6)

$$|f(x)|\leqslant M.$$

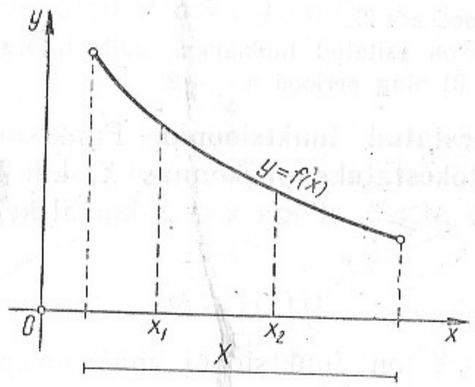
Kui hulgaks X on funktsiooni määramispiirkond, siis kõneldakse lihtsalt **tõkestatud funktsioonist.**



Joon. 15.6



Joon. 15.7



Joon. 15.8

Näiteid. 1. Funktsioonid $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ on tõkestatud kogu arvsirge ulatuses. Nende funktsioonide jaoks võime valida $M=1$.

2. Funktsioon $y=x^2$ ei ole tõkestatud, kui hulgaks X võtta kogu määramispiirkond $-\infty<x<\infty$. Kui aga piirkonnaks X võtta lõik $[0;\ 10]$, siis selles piirkonnas on funktsioon $y=x^2$ tõkestatud.

15.1.5. Monotoonsed funktsioonid. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetatakse **rangelt kasvavaks** piirkonnas X, kui selles piirkonnas igale suuremale argumendi väärtusele vastab suurem funktsiooni väärtus (joon. 15.7):

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

ning **rangelt kahanevaks,** kui igale suuremale argumendi väärtusele vastab väiksem funktsiooni väärtus (joon. 15.8):

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Rangelt kasvavaid ja kahanevaid funktsioone nimetatakse ühiselt **rangelt monotoonseteks funktsioonideks.**

Näiteid. 1. Funktsioon $y=2^x$ on rangelt kasvav kogu oma määramispiirkonnas $-\infty<x<\infty$.

2. Funktsioon $y=-4x+3$ on rangelt kahanev kogu oma määramispiirkonnas.

3. Funktsioon $y=\sin x$ on rangelt kasvav lõigus $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ ning rangelt kahanev lõigus $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Kui iga x_1 ja x_2 korral piirkonnast X

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2) \qquad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

siis nimetatakse funktsiooni $y=f(x)$ **kasvavaks (kahanevaks)** piirkonnas X. Kasvavaid ja kahanevaid funktsioone nimetatakse **monotoonseiks.**

Märkus. Iga funktsioon $y=c$ (konstant) on seega nii kasvav kui ka kahanev funktsioon, kuid ei ole rangelt kahanev ega rangelt kasvav.

Omadus. Monotoonse funktsiooni katkevuspunktid võivad olla vaid I liiki.

Diferentseeruva funktsiooni monotoonsuse üle saab otsustada funktsiooni tuletise märgi järgi (art. 16. 2.1.).

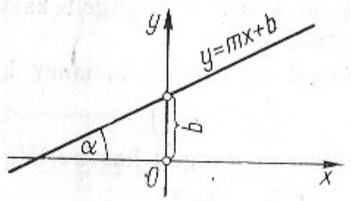
15.2. LINEAARFUNKTSIOON

15.2.1. Lineaarfunktsioon ja tema graafik. Funktsiooni $y=mx+b$, kus $m\neq 0$ ja b on mingid konstandid, nimetatakse **lineaarfunktsiooniks.** Lineaarfunktsioon on määratud ja pidev kogu arvsirgel $-\infty<x<\infty$. Lineaarfunktsiooni $y=mx+b$ graafik on sirge, mis lõikab y-telge punktis $y=b$ (joon. 15.9) ning moodustab x-teljega nurga α, kusjuures $\tan\alpha=m$.

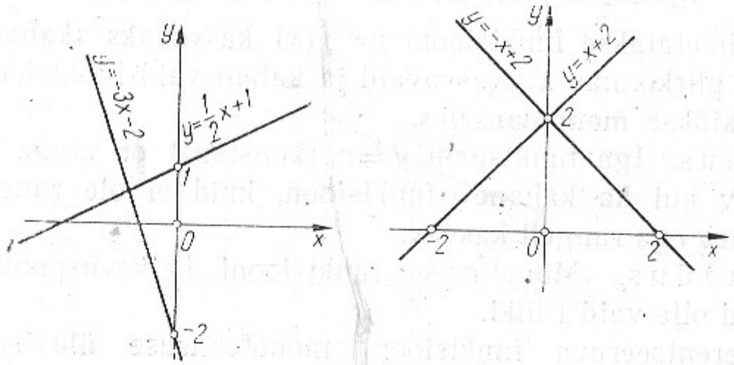
Lineaarfunktsioon on rangelt kasvav, kui $m>0$, ja rangelt kahanev, kui $m<0$ (joon. 15.10).

Näiteid. 1. Lineaarfunktsioonina määratakse taksosõidu hinda sõltuvalt läbitud kilomeetritest. Siin $m=20$ ja $b=20$.
2. Ühtlase kiirendusega liikuva keha kiirus v avaldub lineaarfunktsioonina ajast:

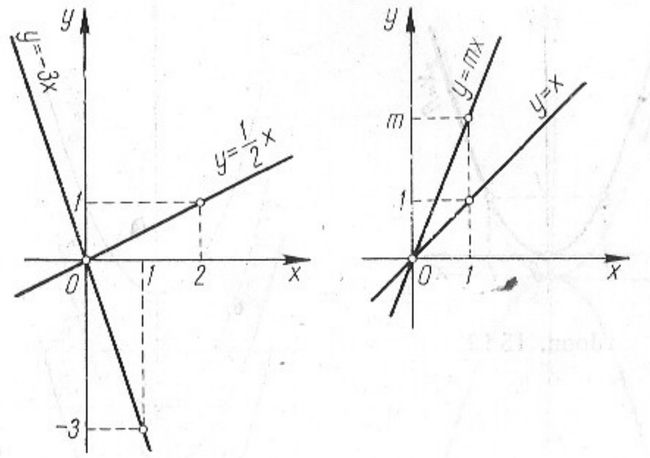
$$v=at+v_0.$$



Joon. 15.9



Joon. 15.10



Joon. 15.11

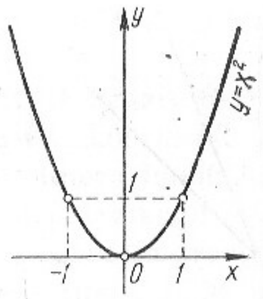
15.2.2. Võrdeline sõltuvus. Kui lineaarfunktsioonis $b=0$, siis esitab see funktsioon **võrdelist sõltuvust**, mille graafikuks on nullpunkti läbiv sirge (joon. 15.11). Suurust m nimetatakse **võrdeteguriks.**

Näiteid. 1. Kauba hind on võrdeline kauba kogusega, võrdeteguriks on ühiku hind.
2. Ühtlase kiirusega liikuva keha poolt läbitud teepikkus on võrdeline ajaga, võrdeteguriks on liikumiskiirus.
3. Vaba langemise kiirus on võrdeline ajaga, võrdeteguriks on raskuskiirendus.

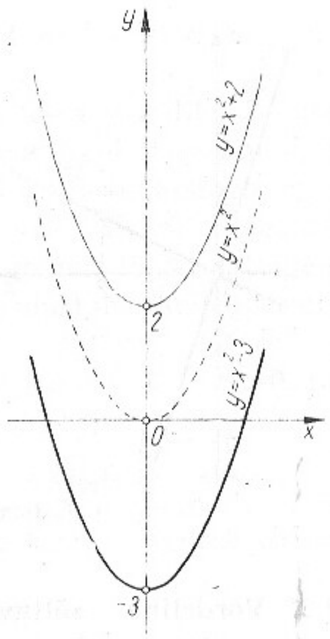
15.3. ASTMEFUNKTSIOONID

Astmefunktsioonidena mõistetakse funktsioone $y=x^n$, kus n (astendaja) on mingi naturaalarv. Iga astmefunktsioon on kogu arvsirgel määratud ja pidev funktsioon. Kui n on paarisarv, siis vastav astmefunktsioon on paarisfunktsioon; kui n on paaritu arv, siis on vastav astmefunktsioon samuti paaritu.

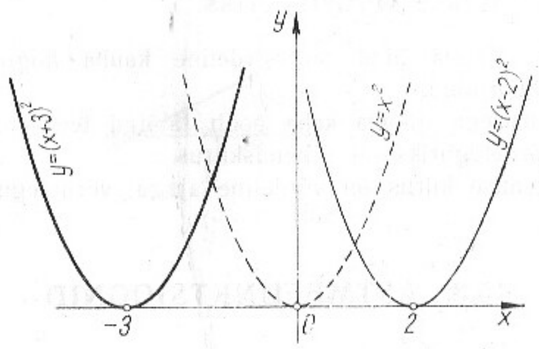
15.3.1. Ruutfunktsioon $y=x^2$ on mittenegatiivsete väärtustega paarisfunktsioon. Tema graafikuks on **ruutparabool** (joon. 15.12), mille haripunkt asub nullpunktis ja mis on sümmeetriline y-telje suhtes.



Joon. 15.12



Joon. 15.13

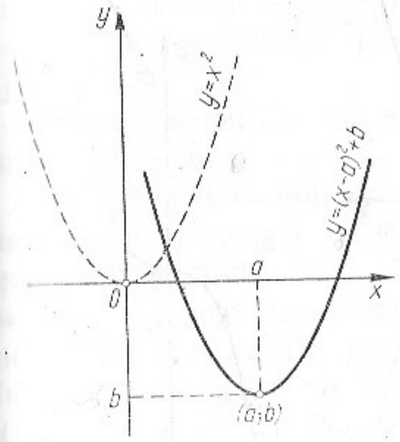


Joon. 15.14

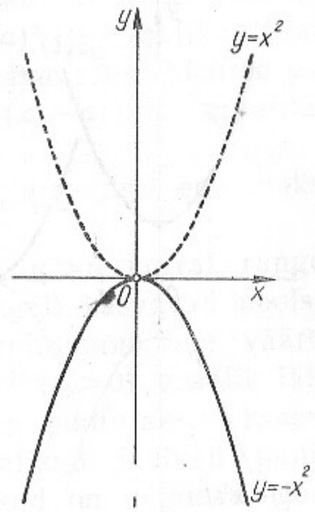
Argumendi positiivsete väärtuste korral on ruutfunktsioon rangelt kasvav, negatiivsete korral rangelt kahanev. Ruutfunktsioonil on miinimum kohal $x=0$, kus funktsiooni väärtuseks on samuti 0. Miinimumpunktis (ruutparabooli haripunktis) on x-telg parabooli $y=x^2$ puutujaks.

Ruutparabool $y=x^2$ on nõgus joon.

Paralleellükkega piki y-telge suuruse b võrra saame



Joon. 15.15



Joon. 15.16

funktsiooni $y=x^2$ graafikust funktsiooni $y=x^2+b$ graafiku (joon. 15.13).

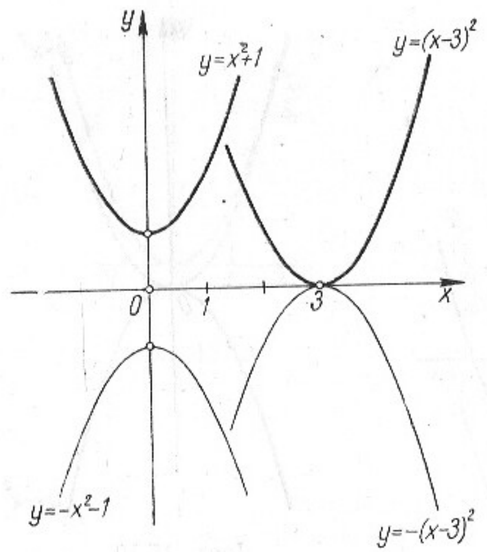
Kui nihutada funktsiooni $y=x^2$ graafikut piki x-telge suuruse a võrra, siis saame funktsiooni $y=(x-a)^2$ graafiku (joon. 15.14).

Nihutades ruutparabooli $y=x^2$ haripunkti punkti $(a; b)$, saame funktsiooni $y=(x-a)^2+b$ graafiku (joon. 15.15).

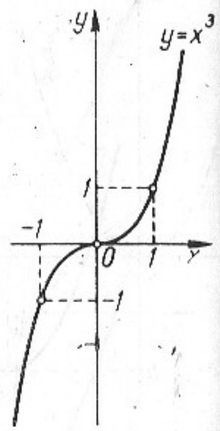
Peegeldades funktsiooni $y=x^2$ graafikut x-telje suhtes, saame funktsiooni $y=-x^2$ graafiku (joon. 15.16). Analoogiliselt saame funktsiooni $y=x^2+b$ graafikust funktsiooni $y=-(x^2+b)$ graafiku ning funktsiooni $y=-(x-a)^2$ graafikust funktsiooni $y=-(x-a)^2$ graafiku (joon. 15.17).

15.3.2. Kuupfunktsioon $y=x^3$ on paaritu funktsioon. Kuupfunktsioon $y=x^3$ on kogu määramispiirkonnas $-\infty<x<\infty$ rangelt kasvav funktsioon. Tema graafik (joon. 15.18), **kuupparabool,** on kumer piirkonnas $-\infty<x<0$ ja nõgus piirkonnas $0<x<\infty$. Kuupparabool $y=x^3$ läbib nullpunkti, kusjuures x-telg on seal tema puutujaks. Nullpunkt on kuupparabooli käänupunktiks (kumerus läheb seal üle nõgususeks).

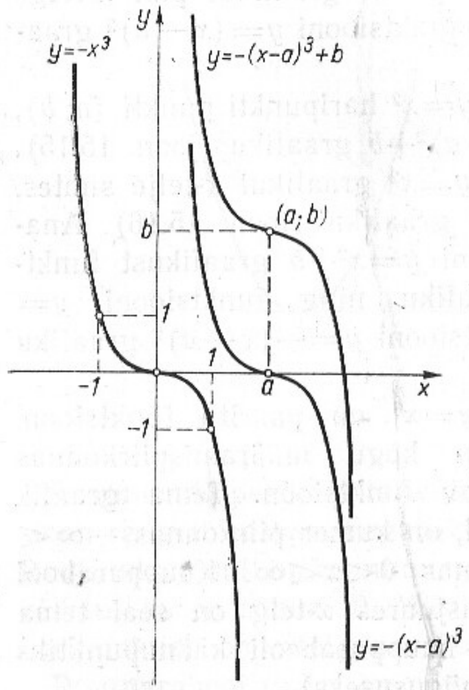
Analoogiliselt eelmises punktis märgituga saame funkt-



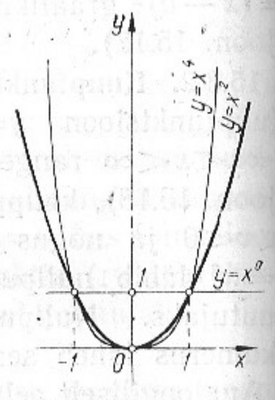
Joon. 15.17



Joon. 15.18



Joon. 15.19



Joon. 15.20

slooni $y=x^3$ graafikust paralleellükke abil funktsioonide $y=x^3+b$, $y=(x-a)^3$ ja $y=(x-a)^3+b$ graafikud. Vaadeldes peegeldust x-telje suhtes, saame funktsioonide $y=-x^3$, $y=-(x-a)^3$ ja $y=-(x-a)^3+b$ graafikud (joon. 15.19).

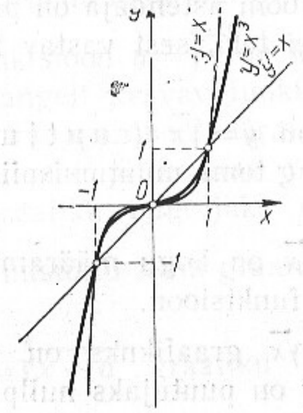
Kuupfunktsioonil $y=x^3$ ei ole minimaalset ega maksimaalset väärtust.

15.3.3. Funktsioonid $y=x^{2n}$ on $n>0$ korral rangelt kahanevad poolsirgel $x\leqslant 0$ ja rangelt kasvavad poolsirgel $x\geqslant 0$. Punktis $x=0$ on neil miinimum, kus väärtuseks on 0. Seega funktsiooni $y=x^{2n}$ $(n>0)$ graafik läbib nullpunkti, kus x-telg on graafiku puutujaks. Kõikide funktsioonide $y=x^{2n}$ $(n>0)$ graafikud läbivad punkte (1; 1) ja (—1; 1). Need graafikud on nõgusad (joon. 15.20) ning sümmeetrilised y-telje suhtes.

Funktsiooni $y=x^{2n}$ $(n>0)$ muutumispiirkond on poolsirge $y\geqslant 0$.

Kui $n=0$, siis saame konstantse funktsiooni $y=x^0=1$. Vahemikus $-1<x<1$ on funktsioon $y=x^{2n}$ graafik seda madalamal, mida suurem on n, kui aga $|x|>1$, siis on olukord vastupidine.

15.3.4. Funktsioonid $y=x^{2n+1}$ on iga naturaalarvu n korral rangelt kasvavad. Nende kõikide graafikud läbivad punkte (—1; —1) (0; 0) ja (1; 1). Kui $n=0$, siis on



Joon. 15.21

graafikuks sirge. Kõikidel muudel juhtudel on graafikuks kuupparabooliga sarnane joon (joon. 15.21), mis läbib nullpunkti, kus tema puutujaks on x-telg. Kui $x<0$, siis on graafik kumer, kui $x>0$, siis nõgus. Punktis 0 on graafiku käänupunkt. Kõikide nende funktsioonide graafikud on sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Kui $0<x<1$, siis on funktsiooni $y=x^{2n+1}$ graafik seda madalamal, mida suurem on naturaalarv n, kui aga $x>1$, siis vastupidi.

Funktsioonide $y=x^{2n+1}$ muutumispiirkond on kogu arvsirge $-\infty<y<\infty$.

15.4. JUURFUNKTSIOONID

Astmefunktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse **juurfunktsioonideks.**

Pöördfunktsioon eksisteerib vaid rangelt monotoonsel funktsioonil, seega tuleb pöördfunktsiooni defineerimiseks funktsioonile $y=x^{2n}$ (art. 15.3.3.) kitsendada viimase määramispiirkonda (võtta selle **funktsiooni ahend**) nii, et saaksime rangelt monotoonse funktsiooni. Kokkuleppeliselt võetakse paarisarvulise astendajaga astmefunktsiooni ahendiks funktsioon $y=x^{2n}$, kus $x\geqslant 0$. Selline ahend on rangelt kasvav funktsioon (joon. 15.20), mille muutumispiirkond on poolsirge $y\geqslant 0$ nagu ka lähtefunktsioonil $y=x^{2n}$.

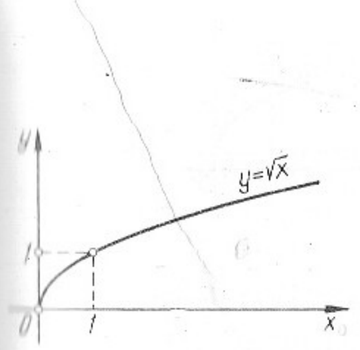
Kui astmefunktsiooni astendaja on paaritu arv, siis niisugust probleemi ei teki, sest vastav funktsioon on rangelt monotoonne.

15.4.1. Funktsioon $y=\sqrt{x}$ (ruutjuur) on määratud poolsirgel $x\geqslant 0$ ning tema muutumispiirkond on poolsirge $y\geqslant 0$ (joon. 15.22).

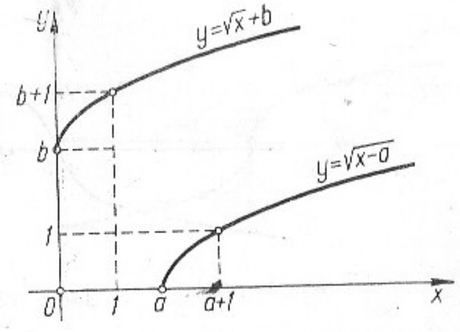
Funktsioon $y=\sqrt{x}$ on kogu määramispiirkonnas pidev ja rangelt kasvav funktsioon.

Funktsiooni $y=\sqrt{x}$ graafikuks on ruutparabooli üks haru, millele y-telg on puutujaks nullpunktis.

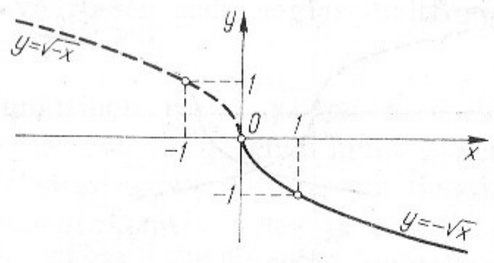
Teades funktsiooni $y=\sqrt{x}$ graafikut, saame temast



Joon. 15.22



Joon. 15.23

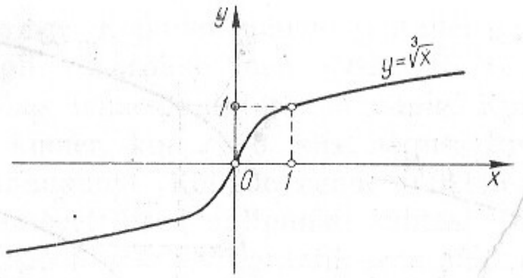


Joon. 15.24

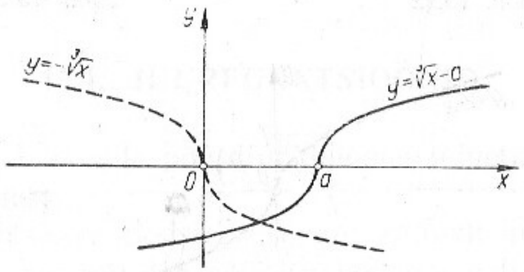
lükke teel funktsioonide $y=\sqrt{x-a}$ ja $y=\sqrt{x}+b$ graafikud (joon. 15.23) ning sümmeetria abil funktsioonide $y=-\sqrt{x}$ ja $y=\sqrt{-x}\,(x\leqslant 0)$ graafikud (joon. 15.24).

15.4.2. Funktsioon $y=\sqrt[3]{x}$ (kuupjuur) on määratud kogu arvsirgel ning tema muutumispiirkonnaks on samuti kogu arvsirge. Funktsioon $y=\sqrt[3]{x}$ on kogu määramispiirkonnas pidev ja rangelt kasvav funktsioon. Selle funktsiooni graafik on kuupparabool. Graafik on nõgus piirkonnas $x<0$ ja kumer piirkonnas $x>0$ (joon. 15.25). Nullpunktis on graafiku puutujaks y-telg. Funktsioon $y=\sqrt[3]{x}$ on paaritu, mistõttu tema graafik on sümmeetriline nullpunkti suhtes.

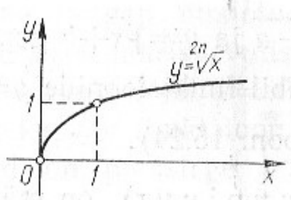
Funktsiooni $y=\sqrt[3]{x-a}$ graafiku saame funktsiooni $y=\sqrt[3]{x}$ graafikust viimase lükkel suuruse a võrra piki

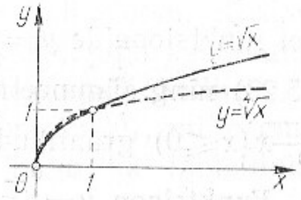


Joon. 15.25



Joon. 15.26

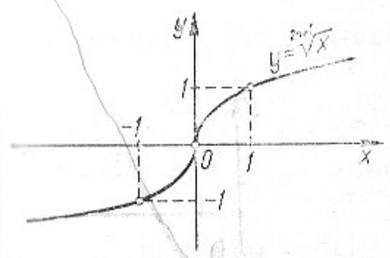




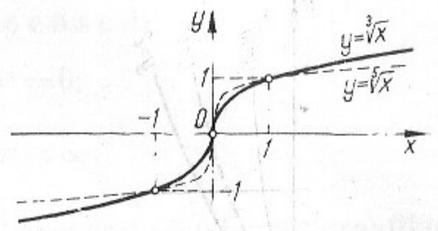
Joon. 15.27

x-telge (joon. 15.26); peegeldamisel y-telje suhtes saame funktsiooni $y=-\sqrt[3]{x}$ graafiku (joon. 15.26).

15.4.3. Funktsioon $y=\sqrt[2n]{x}$ on määratud poolsirgel $x\geqslant 0$ ning tema muutumispiirkonnaks on samuti poolsirge $y\geqslant 0$. See funktsioon on kogu määramispiirkonnas pidev ja rangelt kasvav funktsioon (joon. 15.27). Vaadeldava funktsiooni graafik on kogu ulatuses kumer. Tema puutujaks nullpunktis on y-telg.



Joon. 15.28



Joon. 15.29

Argumendi x tõkestamatul kasvamisel ($x\to\infty$) kasvavad funktsiooni väärtused seda aeglasemalt, mida suurem on n (joon. 15.27).

15.4.4. Funktsioon $y=\sqrt[2n+1]{x}$ on määratud kogu arvsirgel $-\infty<x<\infty$ ning tema muutumispiirkonnaks on samuti kogu sirge $-\infty<y<\infty$. See funktsioon on kogu oma määramispiirkonnas pidev ja rangelt kasvav funktsioon (joon. 15.28). Vaadeldava funktsiooni graafik on nõgus piirkonnas $x<0$ ja kumer piirkonnas $x>0$. Graafik läbib nullpunkti, kus tema puutujaks on y-telg.

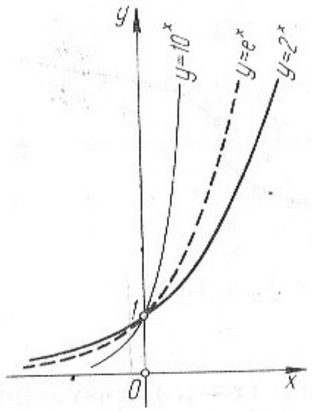
Vaadeldav funktsioon on paaritu, mistõttu tema graafik on sümmeetriline nullpunkti suhtes.

Argumendi x tõkestamatul kasvamisel ($x\to\infty$) kasvavad funktsiooni väärtused seda aeglasemalt, mida suurem on n (joon. 15.29).

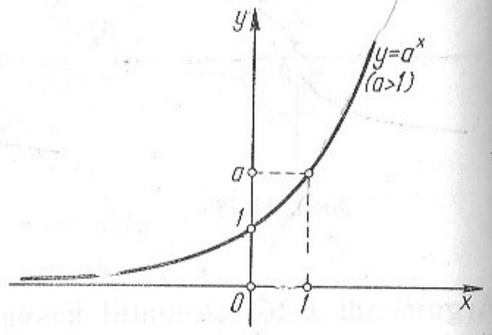
15.5. EKSPONENTFUNKTSIOONID

Eksponentfunktsioonideks nimetatakse funktsioone $y=a^x$, kus $a>0$ ja $a\neq 1$. Eksponentfunktsiooni määramispiirkonnaks on kogu arvsirge $-\infty<x<\infty$ ning muutumispiirkonnaks poolsirge $y>0$.

15.5.1. Funktsioon $y=a^x (a>1)$ on kogu määramispiirkonnas pidev ja rangelt kasvav funktsioon. Funktsioon $y=a^x$ kasvab seda kiiremini, mida suurem on alus a (joon. 15.30).



Joon. 15.30



Joon. 15.31

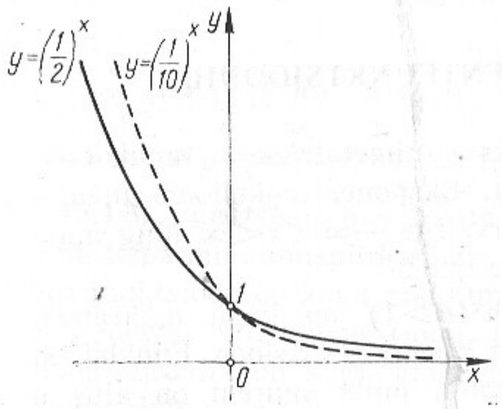
Kehtivad s e o s e d $(a>1)$:

$$\lim_{x\to\infty} a^x=\infty;$$

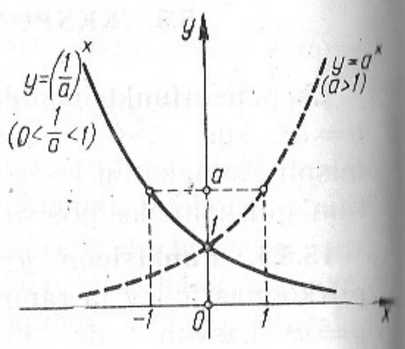
$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0.$$

Funktsiooni $y=a^x$ graafik on kogu ulatuses nõgus, asümptoodiks (kui $x\to-\infty$) on x-telg (joon. 15.31).

15.5.2. Funktsioon $y=a^x$ $(0<a<1)$ on kogu määramispiirkonnas pidev ja rangelt kahanev funktsioon. Kahanemine on seda kiirem, mida väiksem on alus a (joon. 15.32).



Joon. 15.32



Joon. 15.33

Et $0<a<1$, siis kehtivad s e o s e d:

$$\lim_{x\to\infty} a^x=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty.$$

Antud juhul on x-telg eksponentfunktsiooni graafiku asümptoodiks juhul, kui $x\to\infty$.

Funktsioonide $y=a^x$ ja $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ graafikud on omavahel sümmeetrilised y-telje suhtes (joon. 15.33).

15.6. LOGARITMFUNKTSIOONID

Et eksponentfunktsioon on kogu oma määramispiirkonnas pidev ja rangelt monotoonne funktsioon, siis eksisteerib tal pöördfunktsioon, mida nimetatakse **logaritmfunktsiooniks** ning tähistatakse

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

Arvu a nimetatakse **logaritmfunktsiooni aluseks.** Kui $a=10$, siis alust ei märgita. Vastavat funktsiooni $y=\log x$ nimetatakse **logaritmfunktsiooniks alusel 10.** Kui aluseks on arv e, siis vastavat logaritmfunktsiooni tähistatakse $y=\ln x$ ja nimetatakse logaritmfunktsiooniks alusel e ehk **naturaallogaritmiks.**

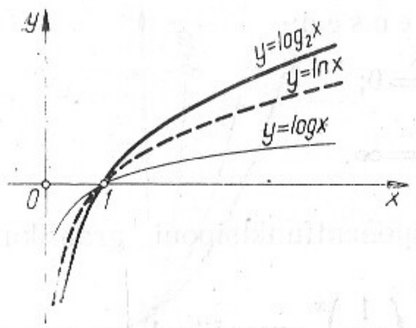
Logaritmfunktsioon $y=\log_a x$ on määratud poolsirgel $x>0$ ning on seal pidev ja rangelt monotoonne funktsioon.

15.6.1. Funktsioon $y=\log_a x$ $(a>1)$ on rangelt kasvav funktsioon. Ta kasvab seda kiiremini, mida väiksem on logaritmi alus.

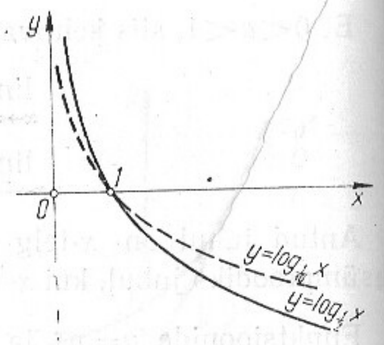
Kehtivad s e o s e d:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x=-\infty.$$



Joon. 15.34



Joon. 15.35

Sõltumata alusest a on logaritmfunktsiooni $y=\log_a x$ väärtus kohal $x=1$ võrdne nulliga (joon. 15.34).

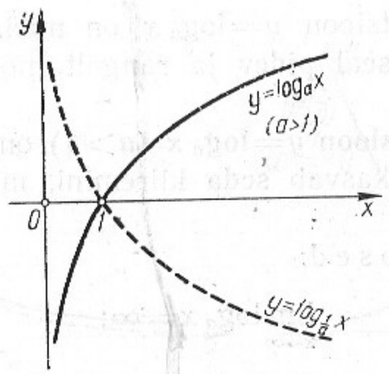
Funktsiooni $y=\log_a x$ $(a>1)$ graafik on kõikjal kumer, tema asümptoodiks (kui $x\to 0^+$) on y-telg.

15.6.2. Funktsioon $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ on kogu määramispiirkonnas rangelt kahanev funktsioon. Ta kahaneb seda kiiremini, mida suurem on logaritmi alus a. Kehtivad s e o s e d:

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x=\infty.$$

Logaritmfunktsiooni $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ graafik on



Joon. 15.36

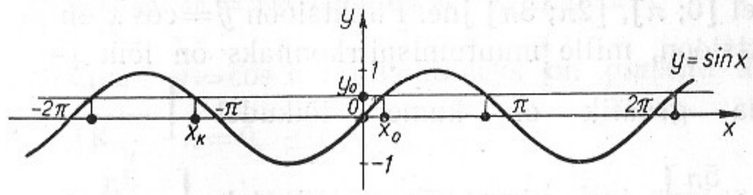
kõikjal nõgus, tema asümptoodiks (kui $x\to 0^+$) on y-telg (joon. 15.35).

Funktsioonide $y=\log_a x$ ja $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ graafikud on omavahel sümmeetrilised x-telje suhtes (joon. 15.36).

15.7. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

Trigonomeetrilisteks funktsioonideks nimetatakse funktsioone $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ ja $y=\cot x$. Suuruste $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ definitsioonid on esitatud art. 12.3.

15.7.1. Siinusfunktsioon $y=\sin x$ on määratud kogu arvsirgel ning on kõikjal pidev. Funktsiooni $y=\sin x$, graafikut (joon. 15.37) nimetatakse sinusoidiks.



Joon. 15.37

Siinusfunktsioon on perioodiline perioodiga 2π. Ta kasvab lõikudel $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$ jne. ning kahaneb lõikudel $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$ jne. Funktsiooni $y=\sin x$ muutumispiirkonnaks on lõik $[-1;\ 1]$. Siinusfunktsioon on paaritu. Tema graafik on kumer lõikudel $[2k\pi;\ (2k+1)\pi]$ ja nõgus lõikudel $[(2k-1)\pi;\ 2k\pi]$, kus $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Siinusfunktsiooni igale väärtusele $y_0\in[-1;\ 1]$ vastab lõpmata palju argumendi väärtusi x_k, mille korral $\sin x_k=y_0$. Kõik need argumendid x_k avalduvad kujul

$$x_k=k\pi+(-1)^k x_0, \qquad (1)$$

kus $\sin x_0 = y_0$, $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ning $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (joon. 15.37).

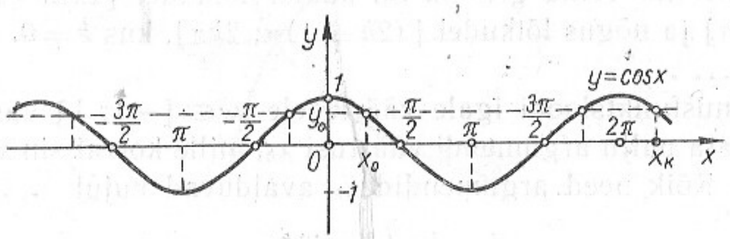
Funktsiooni $y = \sin x$ nullkohtadeks on punktid $x_n = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

15.7.2. Koosinusfunktsioon $y = \cos x$ on määratud kogu arvsirgel ning on kõikjal pidev. Funktsiooni $y = \cos x$ graafikuks on sinusoid, sest $y = \cos x = \sin\left[x + \frac{\pi}{2}\right]$. Koosinusfunktsiooni graafik saadakse siinusfunktsiooni graafikust viimase lükkel piki x-telge $\frac{\pi}{2}$ võrra vasakule (joon. 15.38).

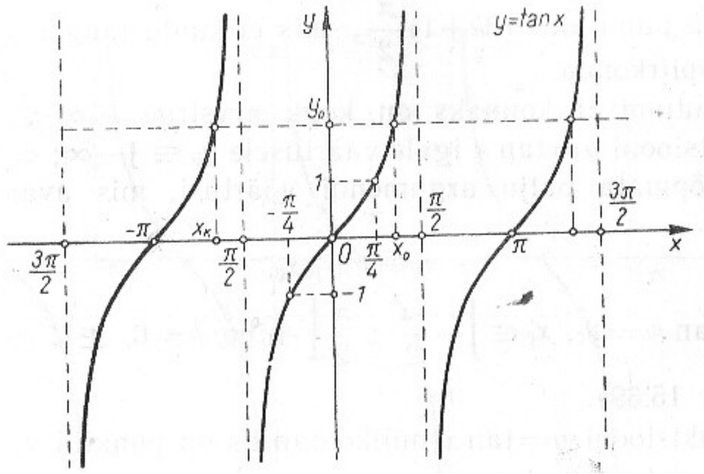
Koosinusfunktsioon on perioodiline perioodiga 2π. Ta kasvab lõikudel $[-\pi; 0]$, $[\pi; 2\pi]$ jne. ning kahaneb lõikudel $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$ jne. Funktsioon $y = \cos x$ on paarisfunktsioon, mille muutumispiirkonnaks on lõik $[-1; 1]$. Tema graafik on kumer lõikudel $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ jne. ning nõgus lõikudel $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ jne.

Koosinusfunktsiooni igale väärtusele $y_0 \in [-1; 1]$ vastab lõpmata palju argumendi väärtusi, mille korral $\cos x_k = y_0$. Kõik need argumendid x_k avalduvad kujul

$$x_k = 2k\pi \pm x_0, \qquad (2)$$



Joon. 15.38



Joon. 15.39

kus $\cos x_0 = y_0$, $x_0 \in [0; \pi]$ ning $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (joon. 15.38).

Funktsiooni $y = \cos x$ nullkohtadeks on punktid $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

15.7.3. Tangensfunktsioon $y = \tan x$. Et $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, siis tangensfunktsioon ei ole määratud nendes punktides, kus $\cos x = 0$, s. t. punktides $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Tangensfunktsioon on perioodiline perioodiga π. Tangensfunktsioon $y = \tan x$ kasvab iga perioodi $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ jne. ulatuses (joon. 15.39). Tangensfunktsiooni graafik on kumer vahemikes $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ jne. ning nõgus vahemikes $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ jne.

Funktsioon $y = \tan x$ on paaritu. Oma määramispiirkonna igas punktis on tangensfunktsioon pidev. Graafik

katkeb punktides $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, mis ei kuulu tangensi määramispiirkonda.

Muutumispiirkonnaks on kogu arvsirge $-\infty<y<\infty$. Funktsiooni $y=\tan x$ igale väärtusele $y_0 \in]-\infty; \infty[$ vastab lõpmata palju argumendi väärtusi, mis avalduvad kujul

$$x_k=k\pi+x_0, \tag{3}$$

kus $\tan x_0=y_0$, $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ning $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ (joon. 15.39).

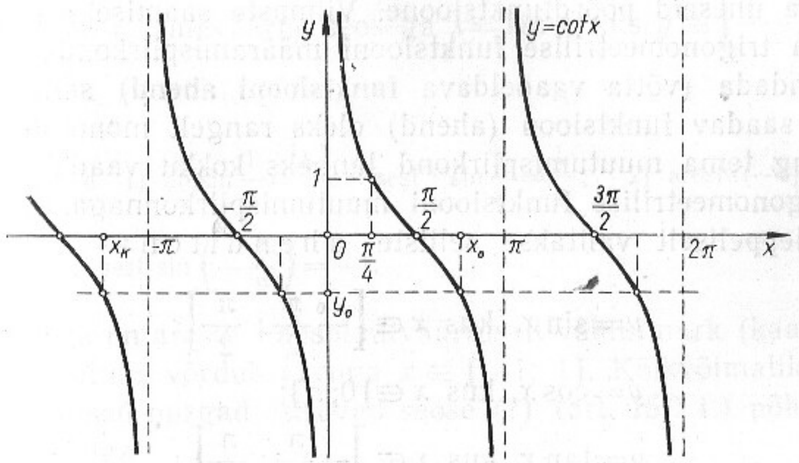
Funktsiooni $y=\tan x$ nullkohtadeks on punktid $x_n=n\pi$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Sirged $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, on tangensfunktsiooni graafiku asümptootideks. Iga kahe asümptoodi vahele jääb graafik ühe perioodi ulatuses (x-telje vahemik pikkusega π). Selle vahemiku vasakpoolsele otspunktile liginedes lähenevad tangensi väärtused miinus lõpmatusele ja parempoolsele otspunktile liginedes pluss lõpmatusele.

15.7.4. Kootangensfunktsioon $y=\cot x$. Et $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$, siis kootangensfunktsioon ei ole määratud nendes punktides, kus $\sin x=0$, s. t. punktides $x=k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Kootangens on perioodiline funktsioon perioodiga π. Funktsioon $y=\cot x$ kahaneb iga perioodi $]-\pi; 0[$, $]0; \pi[$ jne. ulatuses (joon. 15.40). Kootangensfunktsiooni graafik on nõgus vahemikes $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ jne. ning kumer ülejäänud vahemikes.

Funktsioon $y=\cot x$ on paaritu. Oma määramispiirkonna igas punktis on funktsioon pidev. Tema graafik katkeb punktides $k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$), mis ei kuulu kootangensi määramispiirkonda.

Muutumispiirkonnaks on kogu arvsirge $-\infty<y<\infty$. Kootangensfunktsiooni igale väärtusele $y_0 \in]-\infty; \infty[$



Joon. 15.40

vastab lõpmata palju argumendi väärtusi, mis avalduvad kujul

$$x_k=k\pi+x_0, \tag{4}$$

kus $\cot x_0=y_0$, $x_0 \in]0; \pi[$ ning $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ (joon. 15.40).

Funktsiooni $y=\cot x$ nullkohtadeks on punktid $x_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Sirged $x=k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, on kootangensfunktsiooni graafiku asümptootideks. Kootangensi graafik jääb iga kahe asümptoodi vahele ühe perioodi ulatuses (x-telje vahemik pikkusega π). Selle vahemiku vasakpoolsele otspunktile liginedes lähenevad kootangensi väärtused pluss lõpmatusele ja parempoolsele otspunktile liginedes miinus lõpmatusele.

15.8. ARKUSFUNKTSIOONID

Arkusfunktsioonideks (lad. *arkus* — kaar) nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioone.

Et trigonomeetrilised funktsioonid ei ole kogu oma määramispiirkondades rangelt monotoonsed, siis ei saa neil

olla üheseid pöördfunktsioone. Viimaste saamiseks tuleb iga trigonomeetrilise funktsiooni määramispiirkonda kitsendada (võtta vaadeldava **funktsiooni ahend**) selliselt, et saadav funktsioon (ahend) oleks rangelt monotoonne ning tema muutumispiirkond langeks kokku vaadeldava trigonomeetrilise funktsiooni muutumispiirkonnaga. Kokkuleppeliselt valitakse selliste a h e n d i t e n a:

$$y=\sin x,\ \text{kus}\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right];$$

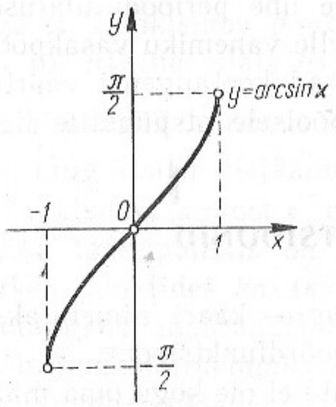
$$y=\cos x,\ \text{kus}\ x\in[0;\pi];$$

$$y=\tan x,\ \text{kus}\ x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[;$$

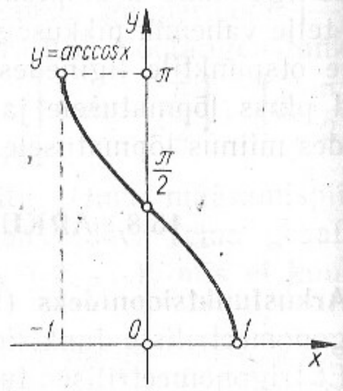
$$y=\cot x,\ \text{kus}\ x\in]0;\pi[.$$

15.8.1. Funktsioon $y=\arcsin x$ (loe: **arkussiinus** x) on funktsiooni $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ pöördfunktsioon. Funktsiooni $y=\arcsin x$ määramispiirkonnaks on lõik $[-1;\ 1]$, muutumispiirkonnaks lõik $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ ning ta on paaritu funktsioon (joon. 15.41).

Vastavalt pöördfunktsiooni definitsioonile on seos $y=$



Joon. 15.41



Joon. 15.42

$=\arcsin x$ samaväärne seosega $x=\sin y$, kus $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

N ä i t e i d. 1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, sest $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$; 2) $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, sest $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Seega on $\arcsin x$ absoluutväärtuselt vähim nurk (kaar), mille siinus võrdub arvuga $x\in[-1;\ 1]$. Kõikvõimalikud niisugused nurgad esituvad seose (1) (art. 15.7.1.) põhjal avaldisega

$$k\pi+(-1)^k\arcsin x,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

Neid nurki (kaari) tähistatakse ühise sümboliga $\operatorname{Arcsin} x$:

$\operatorname{Arcsin} x=k\pi+(-1)^k\arcsin x$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Sageli kõneldakse ka mitmesest funktsioonist $y=\operatorname{Arcsin} x$ ja funktsioonist $y=\arcsin x$ kui tema peaharust.

15.8.2. Funktsiooni $y=\arccos x$ (loe: **arkuskoosinus** x) on funktsiooni $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$, pöördfunktsioon. Funktsiooni $y=\arccos x$ määramispiirkonnaks on lõik $[-1;\ 1]$ ning muutumispiirkonnaks lõik $[0;\ \pi]$ (joon. 15.42).

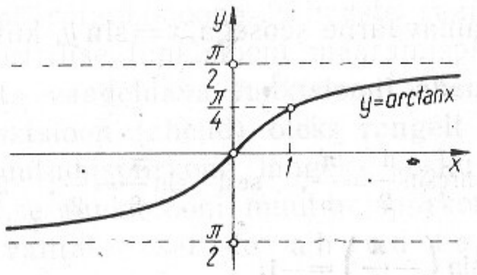
Pöördfunktsiooni definitsiooni kohaselt seos $y=\arccos x$ on samaväärne seosega $x=\cos y$, kus $y\in[0;\ \pi]$.

N ä i t e i d. 1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, sest $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, sest $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

Analoogiliselt sümboliga $\operatorname{Arcsin} x$ defineeritakse art. 15.7.2. valemi (2) põhjal

$\operatorname{Arccos} x=2k\pi\pm\arccos x$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Ka siin öeldakse, et funktsioon $y=\arccos x$ on mitmese funktsiooni $y=\operatorname{Arccos} x$ peaharu.

15.8.3. Funktsioon $y=\arctan x$ (arkustangens x) on funktsiooni $y=\tan x$, $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, pöördfunktsioon.



Joon. 15.43

Funktsiooni $y=\arctan x$ määramispiirkonnaks on kogu arvsirge, muutumispiirkonnaks vahemik $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ ning ta on paaritu funktsioon (joon. 15.43).

Kehtivad s e o s e d:

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

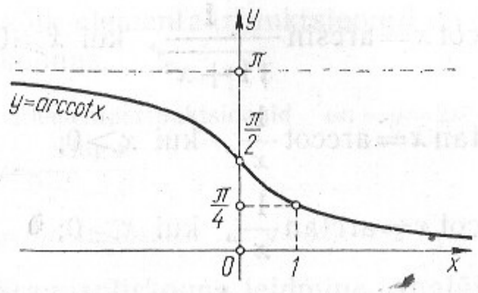
Seos $y=\arctan x$ on pöördfunktsiooni definitsiooni kohaselt samaväärne seosega $x=\tan y$, $y\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

N ä i t e i d. 1) $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, sest $\tan\frac{\pi}{4}=1$; 2) $\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, sest $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Analoogiliselt sümboliga Arcsin x defineeritakse art. 15.7.3. valemi (3) põhjal

Arctan $x=k\pi+\arctan x$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Ka siin kõneldakse funktsioonist $y=\arctan x$ kui mitmese funktsiooni $y=\mathrm{Arctan}\,x$ peaharust.

15.8.4. Funktsioon $y=\operatorname{arccot} x$ (arkuskootangens x) on funktsiooni $y=\cot x$, $x\in\,]0;\ \pi[$, pöördfunktsioon. Funktsiooni $y=\operatorname{arccot} x$ määramispiirkonnaks on kogu arvsirge ning muutumispiirkonnaks vahemik $]0;\ \pi[$ (joon. 15.44).



Joon. 15.44

Kehtivad s e o s e d:

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi.$$

Pöördfunktsiooni definitsiooni kohaselt seos $y=\operatorname{arccot} x$ on samaväärne seosega $x=\cot y$, kus $y\in\,]0;\ \pi[$.

N ä i t e i d. 1) $\operatorname{arccot}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$, sest $\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{arccot}(-1)=\frac{3\pi}{4}$, sest $\cot\frac{3\pi}{4}=-1$.

Analoogiliselt sümboliga Arcsin x defineeritakse art. 15.7.4. valemi (4) põhjal

$$\mathrm{Arccot}\,x=k\pi+\operatorname{arccot} x,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

Ka siin kõneldakse funktsioonist $y=\operatorname{arccot} x$ kui mitmese funktsiooni $y=\mathrm{Arccot}\,x$ peaharust.

15.8.5. Seoseid arkusfunktsioonide väärtuste vahel

Kehtivad järgmised v a l e m i d:

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x;$$

$$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x;$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x;$$

$$\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arccot} x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \text{kui } x\geqslant 0;$$

$$\arctan x=\operatorname{arccot}\frac{1}{x},\quad \text{kui } x>0;$$

$$\operatorname{arccot} x=\arctan\frac{1}{x},\quad \text{kui } x>0;$$

$$\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{kui } -1<x<1;$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arccot} x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arccos x=\operatorname{arccot}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{kui } -1<x<1.$$

15.9. ELEMENTAARFUNKTSIOONID

15.9.1. Elementaarfunktsiooni mõiste. Põhiliste elementaarfunktsioonidena mõistetakse järgmisi funktsioone:

1) konstantne funktsioon $y=c$;
2) astmefunktsioonid $y=x^n$, $n\in\mathbf{N}$;
3) eksponentfunktsioon $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$;
4) trigonomeetrilised funktsioonid

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,\quad y=\cot x;$$

5) ülaltoodute pöördfunktsioonid.

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse iga funktsiooni, mida on võimalik moodustada põhilistest elementaarfunktsioonidest, rakendades kindel (lõplik) arv kordi nelja aritmeetilist tehet (liitmist, lahutamist, korrutamist, jagamist) ja liitfunktsiooni moodustamist.

Arvestades põhiliste elementaarfunktsioonide pidevust ning pidevate funktsioonide omadusi (art. 4.6.), saame

järeldada, et kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näiteid. 1. Elementaarfunktsioonid on $y=2x^2-3x+4$, $y=\sqrt{\sin x+e^x}$, $y=\dfrac{x\log x}{2x-3}$.

2. Mitteelementaarne funktsioon on $y=x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$.

15.9.2. Määramispiirkonna leidmine. Analüütiliselt valemiga antud elementaarfunktsiooni **määramispiirkonnaks** loetakse kõigi nende argumendi väärtuste hulka, mille korral antud avaldis on määratud. Kitsendused tulenevad põhiliste elementaarfunktsioonide määramispiirkondade piiratusest ja sellest, et nulliga jagada ei saa.

Näide. Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

1) $y=\dfrac{\cos x}{x^2+5x-6}$, 2) $y=\log(4x-3)$, 3) $y=\sqrt{5-x}$,

4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

Lahendused. 1. Nulliga jagada ei saa, siis $y=\dfrac{\cos x}{x^2+5x-6}$ pole määratud argumendi x nendel väärtustel, mille korral $x^2+5x-6=0$, s. t. $x_1=1$, $x_2=-6$. Seega antud funktsiooni määramispiirkond on hulk $X=]-\infty;\ -6\,[\cup]-6;\ 1\,[\cup]1;\ \infty[$.

2. Et logaritmfunktsiooni määramispiirkonnaks on vaid positiivsete reaalarvude hulk, siis funktsioon $y=\log(4x-3)$ on määratud neis punktides x, milles $4x-3>0$ ehk $x>\dfrac{3}{4}$.

3. Funktsiooni $y=\sqrt{x}$ määramispiirkond on poolsirge $x\geqslant 0$, seetõttu on funktsioon $y=\sqrt{5-x}$ määratud vaid neis punktides x, milles $5-x\geqslant 0$ ehk $x\leqslant 5$.

4. Et $y=\arcsin x$ on määratud vaid lõigul $[-1;\ 1]$, siis $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ on määratud, kui $-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1$ ehk $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. Seega koosneb funktsiooni $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ määramispiirkond punktidest x, mille korral $|x|\geqslant 1$.

15.10. POLÜNOOMID

Funktsiooni

$$y=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

kus a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 on konstandid, nimetame ***n*-nda astme polünoomiks.** Siinjuures eeldatakse, et $a_n\neq0$. Kõikide polünoomide määramispiirkond on kogu arvsirge. Kui polünoomi astendaja n on paaritu, siis on ka muutumispiirkonnaks kogu arvsirge.

Kui $a_n>0$, siis

$$\lim_{x\to\infty}P_n(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}P_n(x)=\begin{cases}\infty, \text{ kui } n \text{ on paarisarv,}\\ -\infty, \text{ kui } n \text{ on paaritu.}\end{cases}$$

Kui $a_n<0$, siis on vastavateks piirväärtusteks vastupidise märgiga lõpmatused.

15.10.1. Ruutpolünoom $y=ax^2+bx+c$. Ruutpolünoomi ehk **teise astme polünoomi** nimetatakse ka **ruutfunktsiooniks.** Tema graafik on parabool, mille telg on paralleelne y-teljega ning harud on suunatud ülespoole, kui $a>0$, või allapoole, kui $a<0$ (joon. 15.45). Selle parabooli haripunkt asub punktis

$$A\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

Ruutpolünoomi nullkohtadeks on võrrandi $ax^2+bx+c=0$ reaalarvulised lahendid x_1 ja x_2, kui need eksisteerivad, s. t. kui $D=b^2-4ac\geqslant0$.

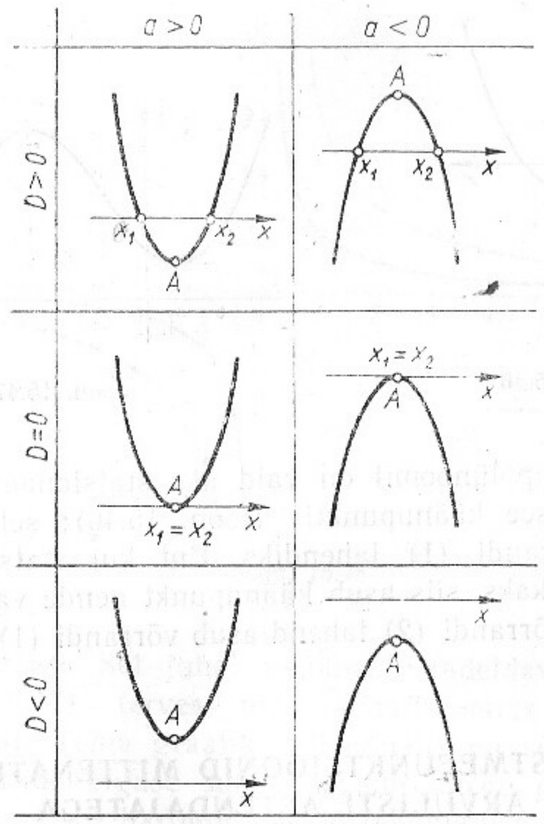
Haripunkti A saab leida tuletise mõistet kasutades, sest sellel kohal on funktsiooni tuletis võrdne nulliga (statsionaarne punkt).

Näide. Leida funktsiooni $y=x^2-6x+8$ nullkohad ja graafiku haripunkt.

Nullkohtadeks on võrrandi $x^2-6x+8=0$ lahendid

$$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-8}=-3\pm1,\ x_1=-2,\ x_2=-4.$$

Et $y'=2x-6$, siis haripunkti asukoha määrame võrrandist $2x-6=0$, millest $x=3$. Haripunkti teise koordinaadi saame, kui leiame antud funktsiooni väärtuse kohal $x=3$. Haripunkt on seega $A(3;\ -1)$.



Joon. 15.45

15.10.2. Kuuppolünoom $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Funktsiooni nullkohtadeks on võrrandi $ax^3+bx^2+cx+d=0$ lahendid. Sellel võrrandil on kindlasti üks reaalarvuline lahend; kuid võib olla ka kolm või kaks, olenevalt kordajatest a, b, c ja d.

Graafiku statsionaarsed punktid (art. 16.2.2.) on määratud võrrandi

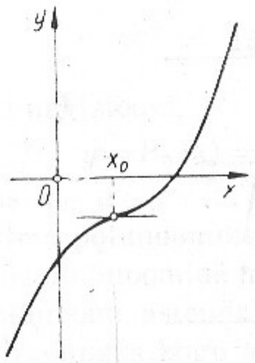
$$y'=3ax^2+2bx+c=0 \qquad (1)$$

lahenditega. Neid võib olla kas kaks, üks või mitte ühtegi.

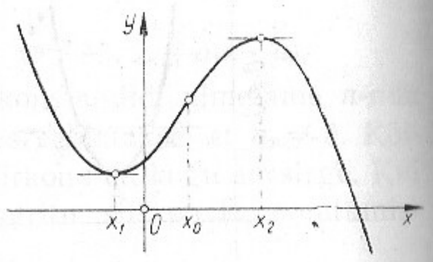
Kuuppolünoomi graafiku käänupunkti määrab võrrandi

$$y''=6ax+2b=0 \qquad (2)$$

lahend $x_0=-\frac{b}{3a}$.



Joon. 15.46



Joon. 15.47

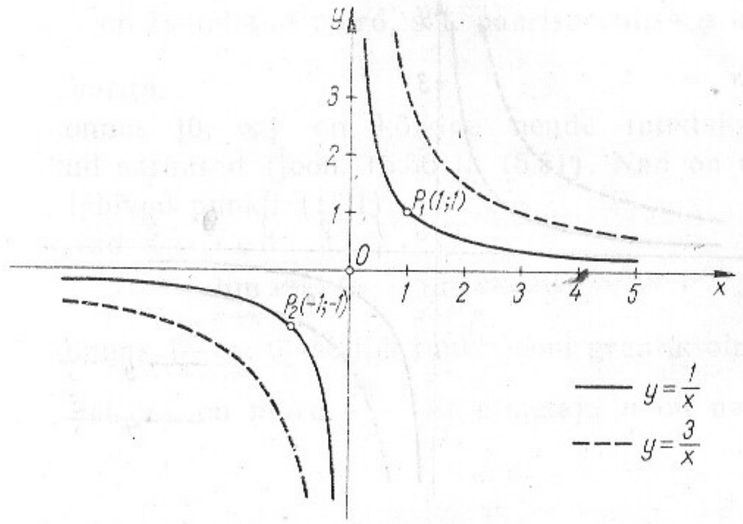
Kui kuuppolünoomil on vaid üks statsionaarne punkt, siis asub see käänupunktis (joon. 15.46); sel juhul on x_0 ka võrrandi (1) lahendiks. Ent kui statsionaarseid punkte on kaks, siis asub käänupunkt nende vahel (joon. 15.47) ja võrrandi (2) lahend asub võrrandi (1) lahendite vahel.

15.11. ASTMEFUNKTSIOONID MITTENATURAALARVULISTE ASTENDAJATEGA

Kui astmefunktsiooni $y=x^\alpha$ astendaja α pole naturaalarv, siis ei loeta seda funktsiooni põhiliste elementaarfunktsioonide hulka, vaid teda saab esitada viimaste kaudu.

15.11.1. Pöördvõrdeline sõltuvus. Selliselt nimetatakse vastavust, mis on esitatud seosega $y=\frac{a}{x}$, kus a on konstant. Nii defineeritud funktsioon on määratud kogu arvsirgel, välja arvatud punkt $x=0$. Funktsioon $y=\frac{a}{x}=ax^{-1}$ on paaritu ning oma määramispiirkonnas rangelt monotoonne funktsioon. Tema graafik on hüperbool, mille asümptootideks on koordinaatteljed.

Vaadeldaval funktsioonil ei ole lokaalseid ekstreemumeid ega käänupunkte.



Joon. 15.48

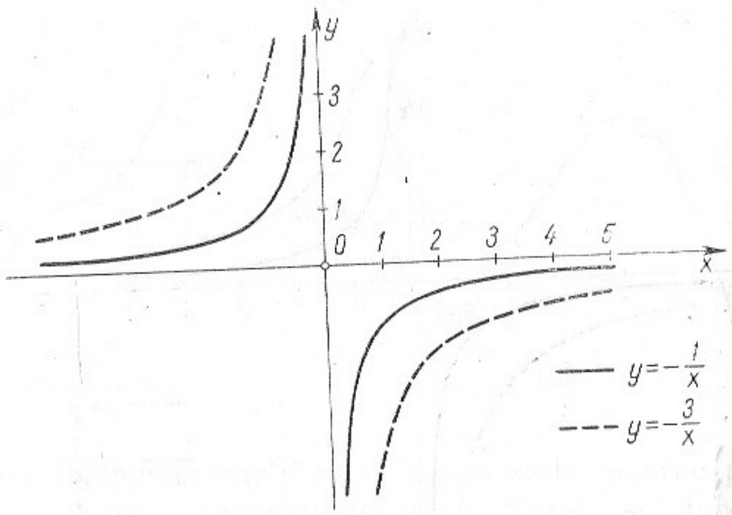
Olgu $a>0$. Sel juhul kahaneb vaadeldav funktsioon (joon. 15.48) terves määramispiirkonnas $X=]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$. Tema graafik (hüperbool) on sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes, samuti sirge $y=x$ suhtes. Selle hüperbooli haripunktid (lõikepunktid sirgega $y=x$) asuvad punktides $P_1(\sqrt{a}; \sqrt{a})$ ja $P_2(-\sqrt{a}; -\sqrt{a})$. Graafik on kumer piirkonnas $]-\infty; 0[$ ja nõgus piirkonnas $]0; \infty[$.

Kehtivad s e o s e d:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{x}=0;$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{a}{x}=-\infty, \quad \lim_{x\to0^+}\frac{a}{x}=\infty.$$

Olgu $a<0$. Sel juhul kasvab funktsioon $y=\frac{a}{x}$ (joon. 15.49). oma määramispiirkonnas $X=]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$. Tema graafik (hüperbool) on sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes, samuti sirge $y=-x$ suhtes. Selle hüperbooli haripunktid (lõikepunktid sirgega $y=-x$) asuvad



Joon. 15.49

punktides $P_1(-\sqrt{-a};\ \sqrt{-a})$ ja $P_2(\sqrt{-a};\ \sqrt{-a})$. Graafik on nõgus piirkonnas $]-\infty;\ 0[$ ja kumer piirkonnas $]0;\ \infty[$.

Kehtivad seosed:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{x}=0;$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{a}{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{a}{x}=-\infty.$$

15.11.2. Funktsioonid $y=x^\alpha$ $(\alpha<0)$ defineeritakse järgmiselt:

$$y=x^\alpha=\frac{1}{x^{-\alpha}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}, \quad \text{kui } -\alpha=\frac{m}{n};$$

$y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, kui α on irratsionaalarv.

Nendest definitsioonidest järeldub, et vaadeldava funktsiooni määramispiirkond sõltub astendajast α. Nimelt,

1) kui α on paarituarvulise nimetajaga murd, siis on määramispiirkonnaks hulk $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ \infty[$;

2) kõikide muude astendajate α korral on määramispiirkonnaks poolsirge $]0;\ \infty[$.

Märkus. Kui α on ratsionaalarv, siis eeldame, et

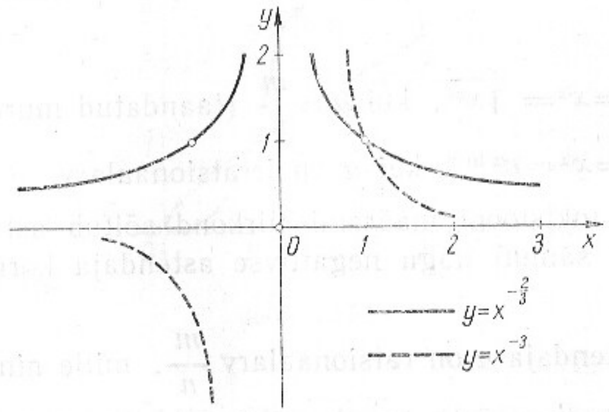
$-\alpha=\frac{m}{n}$ on taandatud murd, s. t. paarisarvulise n korral on m paaritu.

Piirkonnas $]0;\ \infty[$ on kõikide nende funktsioonide graafikud sarnased (joon. 15.50 ja 15.51). Nad on nõgusad ja läbivad punkti (1; 1).

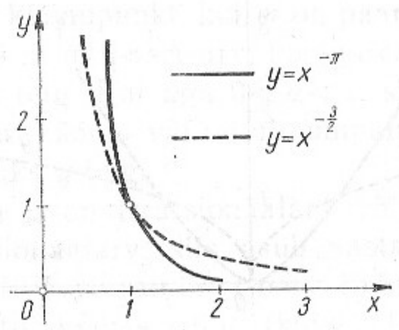
Kehtivad seosed:

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha=0; \qquad \lim_{x\to0^+}x^\alpha=\infty.$$

Piirkonnas $]-\infty;\ 0[$ sõltub funktsiooni graafik oluliselt sellest, milline on murd $\frac{m}{n}$. Et nimetaja n on paaritu,



Joon. 15.50



Joon. 15.51

siis võib lugeja m olla nii paaris- kui ka paaritu arv. Kui $\frac{m}{n}$ on paarisarvulise lugejaga murd (näiteks $-\alpha=\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$), siis on funktsiooni graafik sümmeetriline y-telje suhtes, s. t. funktsioon on paarisfunktsioon. Ent kui $\frac{m}{n}$ on paarituarvulise lugejaga murd (näiteks $-\alpha=\frac{m}{n}=\frac{3}{1}$), siis on funktsiooni graafik sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes, s. t. funktsioon on paaritu funktsioon (joon. 15.50).

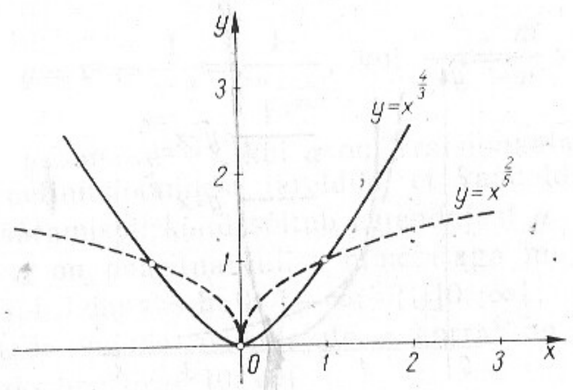
15.11.3. Funktsioonid $y=x^\alpha$ ($\alpha>0$) defineeritakse võrdustega:

$$y=x^\alpha=\sqrt[n]{x^m},\ \text{kui}\ \alpha=\frac{m}{n}\ \text{(taandatud murd)};$$

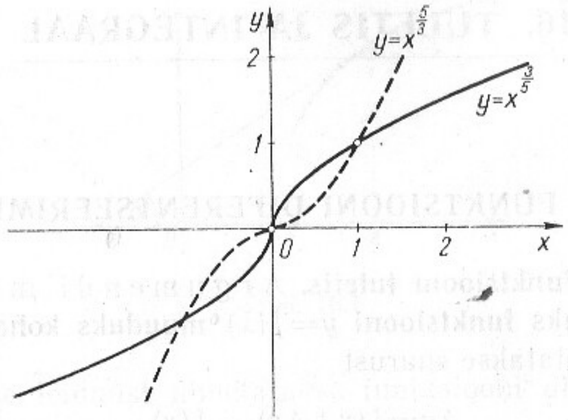
$$y=x^\alpha=e^{\alpha \ln x},\ \text{kui}\ \alpha\ \text{on irratsionaalarv.}$$

Selle funktsiooni määramispiirkond sõltub astendajast α täpselt samuti nagu negatiivse astendaja korral (art. 15.11.2.).

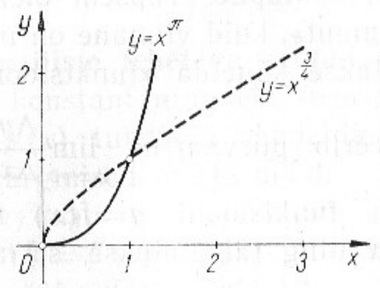
Kui astendaja α on ratsionaalarv $\frac{m}{n}$, mille nimetaja n on paaritu arv, siis paarisarvulise lugeja m korral on



Joon. 15.52



Joon. 15.53



Joon. 15.54

tegemist paarisfunktsiooniga (joon. 15.52) ning paaritu m korral paaritu funktsiooniga (joon. 15.53). Kui $\alpha>1$, siis $x>0$ korral on funktsiooni $y=x^\alpha$ graafik nõgus ning punktis $x=0$ on käänupunkt, kui m on paaritu arv, ja miinimumpunkt, kui m on paarisarv, kusjuures graafiku puutujaks on seal x-telg. Kui aga $0<\alpha<1$, siis $x>0$ korral on graafik kumer, käänu- või miinimumpunktis ($x=0$) on graafiku puutujaks y-telg.

Kui astendaja α on irratsionaalarv või paarisarvulise nimetajaga ratsionaalarv, siis asub vastava funktsiooni graafik tervenisti I veerandis (joon. 15.54). Nullpunktis on graafiku puutujaks kas x-telg (kui $\alpha>1$) või y-telg (kui $0<\alpha<1$).

16. TULETIS JA INTEGRAAL

16.1. FUNKTSIOONI DIFERENTSEERIMINE

16.1.1. Funktsiooni tuletis. Argumendi muudule Δx vastavaks **funktsiooni $y=f(x)$ muuduks kohal (punktis)** x nimetatakse suurust

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Märkus. Termin «funktsiooni muut» on suuruse Δy jaoks võrdlemisi ebatäpne. Täpsem oleks öelda «funktsiooni väärtuse muut», kuid viimane on mõnevõrra pikem, mistõttu eelistatakse kõnelda «funktsiooni muudust».

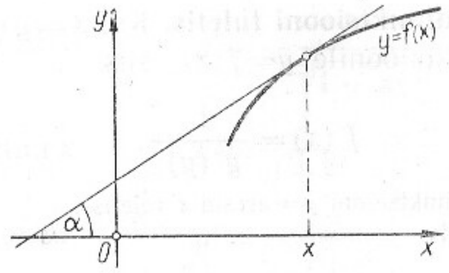
Def. Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, siis nimetatakse seda **funktsiooni $y=f(x)$ tuletiseks kohal (punktis) x** ning tähistatakse sümboliga $f'(x)$.

Sümboli $f'(x)$ asemel kasutatakse ka sümboleid $\dfrac{df(x)}{dx}$ ja $\dfrac{d}{dx}f(x)$, aga ka y' ja $\dfrac{dy}{dx}$.

Kui funktsioonil f eksisteerib tuletis määramispiirkonna X igas punktis x, siis vastavusega $x\to f'(x)$ defineeritud funktsiooni hulgal X nimetatakse antud funktsiooni f **tuletisfunktsiooniks** (ehk lihtsalt **tuletiseks**) ning tähistatakse sümboliga f' või $\dfrac{df}{dx}$.

Tuletise $f'(x)$ geomeetriliseks tähenduseks on funktsiooni $y=f(x)$ graafiku puutuja tõus (puutuja tõusunurga α tangens) kohal x (joon. 16.1): $f'(x)=\tan\alpha$.

Kui funktsioon $s=f(t)$ esitab mingit liikumisseadust (t — aeg, s — aja t jooksul läbitud tee pikkus), siis funktsiooni f tuletis kohal t on võrdne kiirusega ajamomendil t: $v(t)=f'(t)$.



Joon. 16.1

Tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni **diferentseerimiseks.**

Omadus. Kui funktsioon $y=f(x)$ on **diferentseeruv** (s. t. eksisteerib tuletis) kohal x, siis on see funktsioon pidev kohal x.

16.1.2. Aritmeetiliste tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Olgu c konstant ning eksisteerigu funktsioonide $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ tuletised vaadeldaval kohal x. Sel juhul kehtivad järgmised valemid:

1) $[cf(x)]'=cf'(x)$;
2) $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$;
3) $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$;
4) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;
5) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x)\neq 0$.

16.1.3. Liitfunktsiooni tuletis. Kui $y=f(z)$, $z=g(x)$, ehk $y=f[g(x)]$, siis selle **liitfunktsiooni tuletis kohal x** on võrdne avaldisega $f'[g(x)]\cdot g'(x)$ (ehk teisiti $f'(z)\cdot g'(x)$, kus $z=g(x)$).

Näide. Olgu $y=\sin^2 x$, siis $y=z^2$ ja $z=\sin x$.
Sel juhul

$$y'=(z^2)'(\sin x)'=2z\cdot\cos x=2\cdot\sin x\cos x=\sin 2x.$$

Kui kasutada antud liitfunktsiooni jaoks sümbolit $f\circ g$, siis saame *liitfunktsiooni diferentseerimise valemi* kirjutada kujul:

$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'.$$

16.1.4. Pöördfunktsiooni tuletis. Kui $x=g(y)$ on pöördfunktsioon funktsioonile $y=f(x)$, siis

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}.$$

N ä i d e. Leiame funktsiooni $y=\arcsin x$ tuletise.

Et $x=\sin y$, siis

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

16.1.5. Tuletiste tabel. Funktsioonide diferentseerimisel kasutatakse eelmises artiklis esitatud diferentseerimisreegleid ja põhiliste elementaarfunktsioonide (art. 15.9.1.) tuletiste tabelit.

Funktsioon	Tuletis
1. $y=x^a$	$y'=ax^{a-1}$
2. $y=x$	$y'=1$
3. $y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
4. $y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $y=e^x$	$y'=e^x$
6. $y=a^x$	$y'=a^x \ln a$
7. $y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
8. $y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e$
9. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
10. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$
11. $y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
12. $y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$
13. $y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert<1)$
14. $y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert<1)$
15. $y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
16. $y=\operatorname{arccot} x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

16.1.6. Funktsiooni diferentsiaal

Def. Funktsiooni $y=f(x)$ **diferentsiaaliks kohal** x nimetatakse tuletise $f'(x)$ ja argumendi muudu korrutist.

S ü m b o l e i s:

$$df(x)=f'(x)\Delta x. \qquad (1)$$

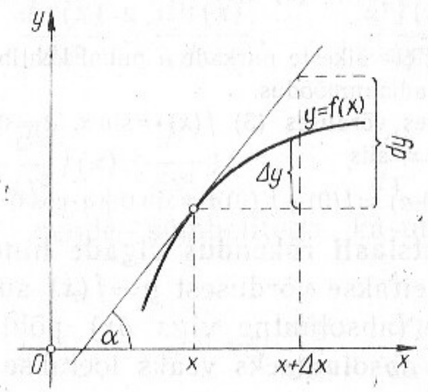
Definitsiooni kohaselt on funktsiooni diferentsiaal võrdeline argumendi muuduga. Funktsiooni $y=f(x)$ diferentsiaali tähistatakse lühidalt s ü m b o l i g a dy.

Funktsiooni $y=f(x)$ diferentsiaali g e o m e e t r i l i n e t ä h e n d u s on esitatud joonisel 16.2.

Sõltumatu muutuja x diferentsiaal $dx=\Delta x$, mistõttu võrduse (1) võib kirjutada kujul

$$df(x)=f'(x)dx. \qquad (2)$$

O m a d u s. Funktsiooni diferentsiaali $df(x)$ kuju $f'(x)dx$ ei sõltu sellest, kas x on sõltuv või sõltumatu muutuja.



Joon. 16.2

Näide. Olgu $y=\ln x$, kus $x=t^2+1$.

Arvutame: $\Delta x=[(t+\Delta t)^2+1]-(t^2+1)=$
$=t^2+2t\,\Delta t+\Delta t^2+1-t^2-1=2t\,\Delta t+\Delta t^2$.

Arvestades, et $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, leiame:

$$\frac{1}{x}\Delta x=\frac{1}{t^2+1}(2t\,\Delta t+\Delta t^2).$$

Leitud suurus ei saa olla antud funktsiooni diferentsiaal, sest ta ei sõltu võrdeliselt argumendi muudust Δt.

Seevastu korrutis (võrduse (2) põhjal diferentsiaal)

$$\frac{1}{x}dx=\frac{1}{t^2+1}\cdot 2t\cdot\Delta t=\frac{2t}{t^2+1}\Delta t$$

on võrdeline argumendi muuduga Δt.

Kui Δx on küllalt väike, siis kehtib ligikaudne võrdus $dy\approx\Delta y$ ehk

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \qquad (3)$$

Viimast seost kasutatakse funktsiooni väärtuste ligikaudseks arvutamiseks.

Näide 1. Leida $\sqrt{9{,}06}$.

Võtame seoses (3) $f(x)=\sqrt{x}$, $x=9$ ja $\Delta x=0{,}06$. Et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, siis

$$\sqrt{9{,}06}=f(9+0{,}06)\approx f(9)+f'(9)\cdot 0{,}06=3+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot 0{,}06=3+0{,}01=3{,}01.$$

Näide 2. Tõestame, et väikeste nurkade α puhul kehtib seos $\sin\alpha\approx\alpha$, kui α on mõõdetud radiaanmõõdus.

Võtame ligikaudses võrduses (3) $f(x)=\sin x$, $x=0$ ja $\Delta x=\alpha$. Et $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$, siis

$$\sin\alpha=f(0+\alpha)\approx f(0)+f'(0)\alpha=\sin 0+\alpha\cdot\cos 0=\alpha.$$

16.1.7. Diferentsiaali rakendus vigade hindamisel. Kui mingi suurus y leitakse võrdusest $y=f(x)$ suuruse x ligikaudse väärtuse (absoluutne viga δx) põhjal, siis saadava väärtuse y **absoluutseks veaks** loetakse suurust

$$\delta y=|f'(x)|\delta x$$

ja **relatiivseks veaks** suurust

$$\frac{\delta y}{|y|}=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\delta x.$$

Näide. Leiame relatiivse vea, mis tekib ühekordsel lugemisel 25-sentimeetrilisel arvutuslükatil.

Tegemist on logaritmilise lükatiga, seega kasutatav funktsioon on $y=\log x$. Võttes (normaalse silma puhul) eksimuse ülemmääraks 0,2 mm, saame logaritmi leidmisel absoluutseks veaks

$$\delta y=\frac{0{,}2}{250}=0{,}0008.\ \text{Et}\ x=10^y,\ \text{siis}$$

$$\frac{\delta x}{x}=\frac{(10^y)'}{10^y}\delta y=\frac{10^y\cdot\ln 10}{10^y}\delta y=\frac{0{,}0008}{0{,}4343}\approx 0{,}002=0{,}2\%.$$

Seega suhteline viga (0,2%) on ühesugune kogu arvutuslükati skaala ulatuses.

16.1.8. Kõrgemat järku tuletised. Funktsiooni $y=f(x)$ tuletisfunktsiooni f' tuletist nimetatakse antud funktsiooni **teist järku tuletiseks** ning märgitakse $y''=f''(x)$. Analoogiliselt defineeritakse kolmandat, neljandat jne. järku tuletised:

$$f'''(x)=[f''(x)]',\ f^{IV}(x)=[f'''(x)]',\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=$$
$$=[f^{(n-1)}(x)]'.$$

Funktsiooni $y=f(x)$ kõrgemat järku tuletisi kohal x tähistatakse ka (Leibnizilt pärinevate) sümbolitega:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2},\ \frac{d^3f(x)}{dx^3},\ \ldots,\ \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

või

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x),\ \frac{d^3}{dx^3}f(x),\ \ldots,\ \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

Paralleelselt nende sümbolitega kasutatakse lühemaid sümboleid

$$y'',\ y''',\ y^{IV},\ \ldots,\ y^{(n)}\ \text{või}\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Vaadeldes kõrgemat järku tuletisi kui funktsioone (tule-

tisfunktsioone), kasutatakse järgmisi sümboleid:

$$f'',\ f''',\ f^{IV},\ \ldots,\ f^{(n)} \text{ või } \frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d^3f}{dx^3},\ \ldots,\ \frac{d^nf}{dx^n}.$$

Näide. Olgu $f(x)=\ln x$. Leiame $f'''(x)$.

Arvutades saame: $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $f''(x)=(x^{-1})'=-x^{-2}$ ning

$$f'''(x)=(-x^{-2})'=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}.$$

Kui eksisteerib $f^{(n)}(x)$, siis öeldakse, et funktsioon $y=f(x)$ on ***n* korda diferentseeruv** kohal x.

16.1.9. Ilmutamata funktsiooni tuletis leitakse vastava võrrandi mõlema poole diferentseerimisel ühe, argumendiks võetud muutuja järgi. Teist muutujat vaadeldakse selle muutuja funktsioonina ning kasutades liitfunktsiooni tuletise leidmise eeskirja.

Näide. Leida ilmutamata funktsiooni $x^2+y^2=1$ tuletis kohal $x=\frac{1}{2}$.

Diferentseerime seda võrrandit:

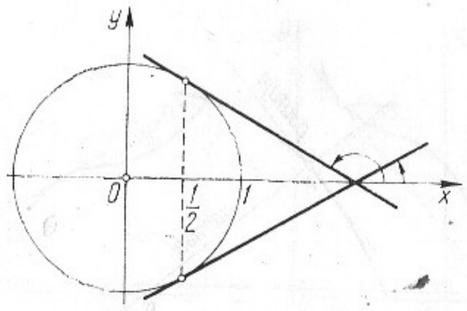
$$2x+2y\cdot y'=0,\quad y'=-\frac{x}{y}.$$

Seosest $x^2+y^2=1$ saame, et muutuja x väärtusele $\frac{1}{2}$ vastab muutuja y kaks väärtust: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Seega määrab antud võrrand kaks funktsiooni, mille tuletisteks antud kohal on vastavalt

$$y'_1=-\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ja } y'_2=-\frac{1}{2}:\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Geomeetriline interpretatsioon annab, et ringjoone $x^2+y^2=1$ ülemine pool määrab ühe funktsiooni ning alumine pool teise (joon. 16.3).

Ilmutamata funktsiooni diferentseerimist kasutatakse nn. **logaritmilisel diferentseerimisel**. Viimane põhineb asjaolul, et logaritmimisel muutuvad avaldised diferentseerimisreeglite rakendamise seisukohalt lihtsamaks.



Joon. 16.3

Näide. Leiame funktsiooni $y=\frac{(x+2)^6}{x^4(x-3)^7}$ tuletise.

Logaritmime:

$$\ln y=6\ln(x+2)-4\ln x-7\ln(x-3).$$

Diferentseerime viimast seost:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=6\cdot\frac{1}{x+2}-4\cdot\frac{1}{x}-7\cdot\frac{1}{x-3}$$

ehk

$$y'=y\left(\frac{6}{x+2}-\frac{4}{x}-\frac{7}{x-3}\right)=\frac{(x+2)^6}{x^4(x-3)^7}\left(\frac{6}{x+2}-\frac{4}{x}-\frac{7}{x-3}\right).$$

16.1.10. Joone puutuja võrrand. Kui joon on antud võrrandiga $y=f(x)$, siis selle **joone puutuja** punktis koordinaatidega x_0 ja $y_0=f(x_0)$ on määratud võrrandiga

$$y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0).$$

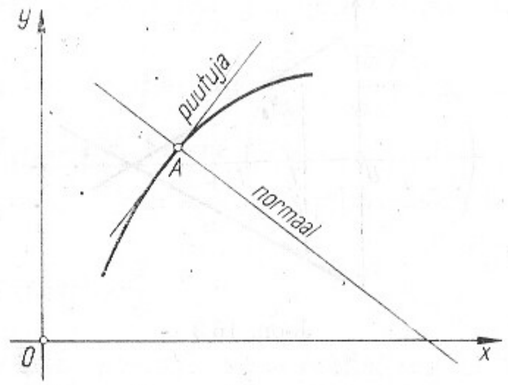
Näide. Leiame joone $y=f(x)=2x^2+3x$ puutuja kohal $x_0=1$. Et $y_0=f(x_0)=5$ ja $f'(x_0)=4x_0+3=7$, siis puutujaks on sirge

$$y-5=7(x-1) \text{ ehk } y=7x-2.$$

16.1.11. Joone normaali võrrand. Joonega lõikuvat sirget, mis on risti lõikepunktist tõmmatud puutujaga, nimetatakse **joone normaaliks** (joon. 16.4).

Kui joon on antud võrrandiga $y=f(x)$, siis selle joone normaali punktis koordinaatidega x_0 ja $y_0=f(x_0)$ määrab võrrand

$$x-x_0=-f'(x_0)\,(y-y_0).$$



Joon. 16.4

N ä i d e. Leiame parabooli $y=x^2$ normaali nullpunktis.

Et $(x^2)'=2x$, siis valemi põhjal saame normaali võrrandina

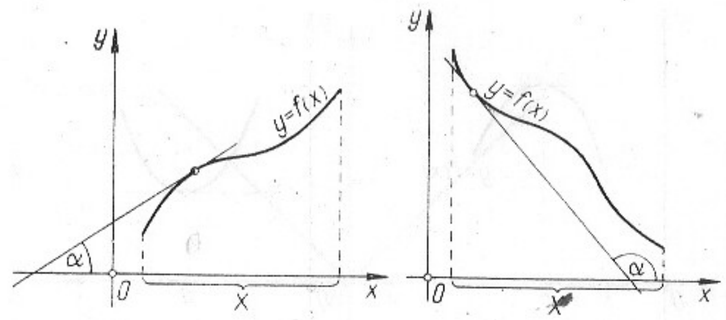
$$x-0=-0\cdot(y-0) \text{ ehk } x=0 \ (y\text{-telg}).$$

16.1.12. Ajaloost. Esimestena esitasid diferentsiaalarvutuse süstematiseerituna inglise füüsik-matemaatik I. N e w t o n (1643—1727) ja saksa filosoof-matemaatik G. W. L e i b n i z (1646—1716). Nad tegid seda teineteisest sõltumatult ja ka erinevalt. Esimene diferentsiaalarvutuse õpik pealkirjaga «Lõpmata väikeste analüüs» ilmus 1696. a. ning selle autor oli prantsuse matemaatik G. F. A. l'H o s p i t a l (1661—1704). Mõiste «tuletis» võttis kasutusele teine prantsuse matemaatik J. L. L a g r a n g e (1736—1813). Temalt pärinevad ka tuletiste sümbolid y', f', y'', f'' jne. Sümbolid $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{df(x)}{dx}$ jne. on kasutusel Leibnizi ettepanekul. Diferentsiaalarvutuse enam-vähem nüüdisaegse käsitluse andis prantsuse matemaatik A. L. C a u c h y (1789—1857).

16.2. TULETISE MÕISTE RAKENDUSI FUNKTSIONAALSE SEOSE ISELOOMUSTAMISEL

16.2.1. Funktsiooni monotoonsus. Funktsiooni monotoonsust iseloomustavad järgmised omadused, eeldades vaadeldava funktsiooni $y=f(x)$ diferentseeruvust.

1. Funktsioon $y=f(x)$ on k a s v a v (k a h a n e v) piirkonnas X siis ja ainult siis, kui $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ iga $x\in X$ korral (joon. 16.5).



Joon. 16.5

2. Kui $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ iga $x\in X$ korral, siis funktsioon $y=f(x)$ on r a n g e l t k a s v a v (k a h a n e v) piirkonnas X.

M ä r k u s. Funktsioon võib olla rangelt kasvav ka siis, kui mõnes punktis $f'(x)=0$. Nii on funktsioon $y=x^3$ rangelt kasvav kogu oma määramispiirkonnas, kuigi selle funktsiooni tuletis võrdub nulliga punktis $x=0$.

3. Funktsioon $y=f(x)$ on konstantne piirkonnas X siis ja ainult siis, kui $f'(x)=0$ iga $x\in X$ korral.

N ä i d e. Leida funktsiooni $y=2x^3+3x^2-12x+5$ kasvamis- ja kahanemispiirkond.

Et $y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$, siis kasvamispiirkond on määratud võrratusega

$$6(x+2)(x-1)>0$$

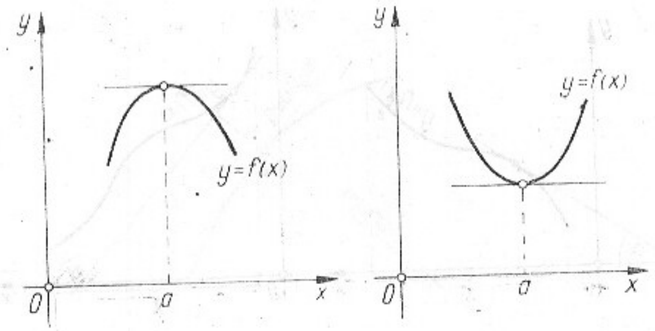
ning kahanemispiirkond võrratusega

$$6(x+2)(x-1)<0$$

Nende võrratuste lahendamisest saame, et funktsioon kasvab piirkonnas $X_1=]-\infty;\ -2\,[\cup]1;\ \infty[$ ja kahaneb piirkonnas $X_2=]-2;\ 1[$.

16.2.2. Lokaalsed ekstreemumid on vaadeldava funktsiooni suurimad (vähimad) väärtused «naaberväärtustega» võrreldes. Need ei tarvitse olla sugugi mitte funktsiooni suurimad või vähimad väärtused kogu määramispiirkonna ulatuses vaadelduina.

Def. Öeldakse, et funktsioonil $y=f(x)$ on kohal a **lokaalne maksimum (lokaalne miinimum),** kui leidub punkti



Joon. 16.6

a niisugune ümbrus $]a-\delta;\ a+\delta[$, kus kehtib võrratus

$$f(x) \leqslant f(a) \quad \text{(vastavalt } f(x) \geqslant f(a)\text{)}. \tag{1}$$

Punkti a nimetatakse sel juhul funktsiooni $y=f(x)$ **lokaalseks ekstreemumkohaks (-punktiks)**, väärtust $f(a)$ aga funktsiooni **lokaalseks ekstreemumiks.**

Kui võrratuses (1) esineb võrdus vaid $x=a$ korral, siis kõneldakse funktsiooni $y=f(x)$ **rangest lokaalsest ekstreemumist** punktis a.

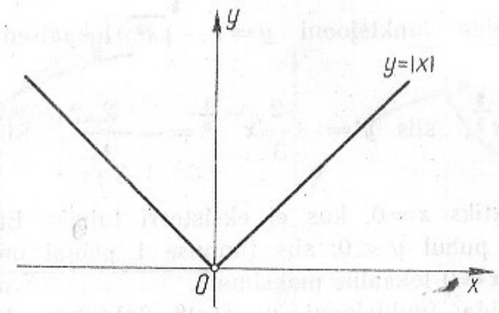
Def. Punkti a nimetatakse funktsiooni $y=f(x)$ **statsionaarseks punktiks,** kui $f'(a)=0$.

Diferentseeruva funktsiooni lokaalne ekstreemum võib esineda vaid statsionaarses punktis (joon. 16.6).

M ä r k u s. Tingimus $f'(a)=0$ on vaid tarvilik tingimus lokaalseks ekstreemumiks. Nii on $x=0$ funktsioonile $y=x^3$ statsionaarseks punktiks, kuid seal ei ole sel funktsioonil lokaalset ekstreemumit.

M ä r k u s. Kui pideval funktsioonil leidub üksikuid punkte, kus tuletis ei eksisteeri, siis ka nendes punktides võib olla lokaalne ekstreemum. Näiteks on funktsioonil $y=|x|$ lokaalne miinimum punktis $x=0$, kus antud funktsioonil ei eksisteeri tuletist (joon. 16.7.).

Statsionaarseid punkte ja punkte, kus ei eksisteeri funktsiooni $y=f(x)$ tuletis, nimetatakse selle funktsiooni **kriitilisteks punktideks.**



Joon. 16.7

Selleks, et otsustada, kas vaadeldaval funktsioonil on kriitilises punktis lokaalne ekstreemum või mitte, kasutatakse järgmisi p i i s a v a i d t u n n u s e i d.

1. Olgu a funktsiooni $y=f(x)$ kriitiline punkt.

Kui $f'(x)>0$ (funktsioon kasvab) punkti a vasakpoolses ümbruses ja $f'(x)<0$ (funktsioon kahaneb) parempoolses ümbruses, siis funktsioonil $y=f(x)$ on punktis a range lokaalne maksimum.

Kui $f'(x)<0$ punkti a vasakpoolses ümbruses ja $f'(x)>0$ parempoolses ümbruses, siis funktsioonil on punktis a range lokaalne miinimum.

Kui aga $f'(x)$ on punkti a vasakpoolses ja parempoolses ümbruses ühe ja sama märgiga, siis punktis a lokaalset ekstreemumit ei ole.

2. Olgu funktsioon $y=f(x)$ vähemalt kaks korda diferentseeruv statsionaarses punktis a.

Kui $f''(a)<0$, siis on punktis a range lokaalne maksimum, kui $f''(a)>0$, siis range lokaalne miinimum. Kui $f''(a)=0$, tuleb kasutada tunnuseid 1 või 3.

3. Olgu funktsioon $y=f(x)$ n korda diferentseeruv statsionaarses punktis a ning

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{n-1}(a)=0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

Kui n on paarisarv, siis punktis a on $f^{(n)}(a)<0$ korral range lokaalne maksimum, $f^{(n)}(a)>0$ korral aga range lokaalne miinimum. Kui n on paaritu arv, siis punktis a lokaalset ekstreemumit ei ole.

Näide 1. Leida funktsiooni $y=1-\sqrt[3]{x^2}$ lokaalsed ekstreemumpunktid.

Et $y=1-x^{\frac{2}{3}}$, siis $y'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Siin on ainsaks kriitiliseks punktiks $x=0$, kus ei eksisteeri tuletis. Et $x<0$ korral $y'>0$ ja $x>0$ puhul $y'<0$, siis tunnuse 1 põhjal on sellel funktsioonil punktis $x=0$ lokaalne maksimum.

Näide 2. Leida funktsiooni $y=f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$ lokaalsed ekstreemumid.

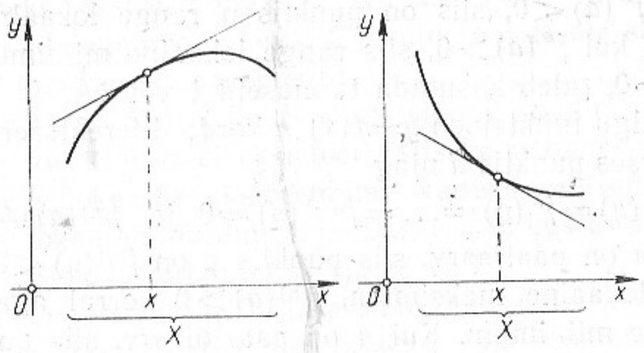
Et $y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$, siis antud funktsiooni korral on punktid $x_1=-2$ ja $x_2=1$ statsionaarsed. Leiame: $f''(x)=12x+6$, millest $f''(-2)<0$, $f''(1)>0$. Tunnuse 2 põhjal on kohal -2 lokaalne maksimum ja kohal 1 lokaalne miinimum. Antud funktsiooni lokaalseks maksimumiks on $f(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+5=25$ ja lokaalseks miinimumiks $f(1)=2+3-12+5=-2$.

Näide 3. Leida funktsiooni $y=f(x)=x^4-3$ lokaalsed ekstreemumid.

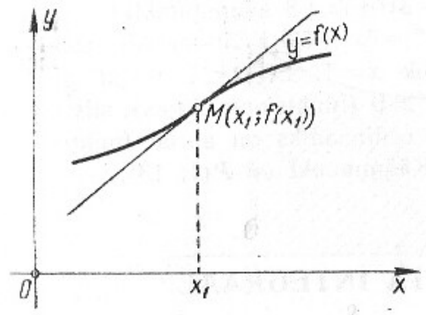
Et $y'=4x^3$, siis ainsaks kriitiliseks punktiks on statsionaarne punkt $x=0$. Antud juhul $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$ ja $f^{IV}(x)=24$. Et $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, ja $f^{IV}(0)\neq 0$, siis tunnuse 3 põhjal on antud funktsioonil punktis 0 lokaalne miinimum ning $f(0)=-3$.

16.2.3. Funktsiooni kumerus ja nõgusus

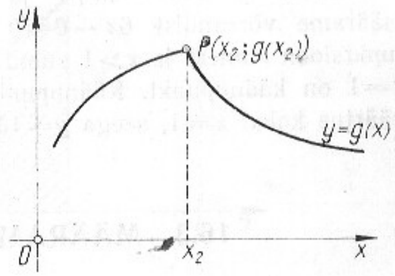
Def. Funktsiooni $y=f(x)$ nimetame **kumeraks (nõgusaks)** piirkonnas X, kui selle piirkonna iga punkti x korral funktsiooni graafiku puutuja asetseb ülalpool (vastavalt allpool) graafikut (joon. 16.8).



Joon. 16.8



Joon. 16.9



Joon. 16.10

Toodud definitsioon määratleb, täpsemalt öeldes, kumeruse ja nõgususe üles. Paljudes käsitlustes defineeritakse kumerus ja nõgusus ümberpöördult (vt. ENE).

Kumerus- ja nõgususpiirkondi saab määrata, lähtudes järgmisest o m a d u s e s t:

kui funktsioon $y=f(x)$ on vähemalt kaks korda diferentseeruv piirkonnas X, siis on ta selles piirkonnas kumer (nõgus) parajasti siis, kui

$$f''(x)<0 \text{ (vastavalt } f''(x)>0) \text{ iga } x\in X \text{ puhul.}$$

Näide. Leida funktsiooni $y=x^5-4x$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad.

Leiame: $y'=5x^4-4$, $y''=20x^3$. Seega funktsioon $y=x^5-4x$ on kumer, kui $x<0$ (sel juhul $y''<0$), ja nõgus, kui $x>0$ (sel juhul $y''>0$).

16.2.4. Käänupunktid

Def. Funktsiooni $y=f(x)$ **käänupunktiks** nimetatakse selle funktsiooni graafiku niisugust punkti, milles eksisteerib puutuja ning millest ühel pool on funktsioon kumer ja teisel pool nõgus.

Joonisel 16.9 esitatud funktsioonil $y=f(x)$ on käänupunkt punktis $M(x_1;\ f(x_1))$. Joonisel 16.10 esitatud funktsioonile $y=g(x)$ ei ole punkt $P(x_2;\ g(x_2))$ käänupunktiks, sest kohal x_2 ei eksisteeri funktsiooni $y=g(x)$ tuletis (ei ole puutujat punktis P).

Kui funktsioon $y=f(x)$ on vähemalt kaks korda diferentseeruv, siis käänupunkt võib olla vaid neis punktides a, kus $f''(a)=0$.

Näide. Leida funktsiooni $y=x^3-3x^2+7x+8$ käänupunktid.

Leiame: $y'=3x^2-6x+7$ ja $y''=6x-6$. Käänupunkti asukoha määrame võrrandist $6x-6=0$ ehk $x=1$. Et $x<1$ puhul $y''<0$ funktsioon kumer) ja $x>1$ puhul $y''>0$ (funktsioon nõgus), siis kohal $x=1$ on käänupunkt. Käänupunkti ordinaadiks on antud funktsiooni väärtus kohal $x=1$, seega $y=13$. Käänupunkt on $P(1;\ 13)$.

16.3. MÄÄRAMATA INTEGRAAL

16.3.1. Algfunktsioon

Def. Funktsiooni $y=F(x)$ nimetatakse antud funktsiooni $y=f(x)$ **algfunktsiooniks** piirkonnas X, kui

$$F'(x)=f(x) \text{ iga } x\in X \text{ puhul.}$$

Näide. Funktsioon $y=\sin x$ on algfunktsiooniks funktsioonile $y=\cos x$, sest $(\sin x)'=\cos x\ \forall\ x$ puhul.

Omadusi.

1. Kui $y=F(x)$ on funktsiooni $y=f(x)$ algfunktsioon, siis on seda ka iga funktsioon $y=F(x)+C$, kus C on konstant:
2. Kui $y=F(x)$ ja $y=G(x)$ on funktsiooni $y=f(x)$ algfunktsioonid, siis

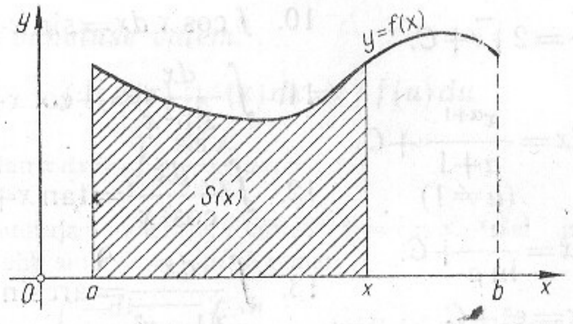
$$G(x)=F(x)+C,$$

kus C on konstant.

3. Igal lõigus pideval funktsioonil eksisteerib algfunktsioon selles lõigus.
4. Olgu $f(x)\geqslant 0$ iga $x\in[a;\ b]$ puhul. Sel juhul on lõigule $[a;\ x]$ toetuva kõvertrapetsi pindalana (joon. 16.11) määratud funktsioon $y=S(x)$ algfunktsiooniks funktsioonile $y=f(x)$ lõigus $[a;\ b]$.
5. Funktsiooni $y=f(x)$ kõikidel algfunktsioonidel on võrdsed muudud:

$$F(b)-F(a)=G(b)-G(a),$$

kus $y=F(x)$ ja $y=G(x)$ on funktsiooni $y=f(x)$ suvalised algfunktsioonid.



Joon. 16.11

16.3.2. Määramata integraal. Kui funktsioon $y=F(x)$ on funktsiooni $y=f(x)$ algfunktsioon, siis selle funktsiooni mistahes algfunktsioon avaldub kujul $y=F(x)+C$, kus C on suvaline konstant.

Def. Funktsiooni $y=f(x)$ **määramata integraaliks** piirkonnas X nimetatakse avaldist $F(x)+C$, kus $F'(x)=f(x)$ iga $x\in X$ puhul ning C on suvaline konstant.

Funktsiooni $y=f(x)$ määramata integraali tähistatakse sümboliga

$$\int f(x)\,dx.$$

Näiteid. $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C;$

$$\int e^x\,dx=e^x+C;$$

$$\int(2x-\cos x)\,dx=x^2-\sin x+C.$$

Määramata integraali leidmist nimetatakse antud funktsiooni **integreerimiseks.** Integreerimine on diferentseerimise pöördtehe. Sellest tulenevad järgmised seosed.

1. $(\int f(x)\,dx)'=f(x).$
2. $\int f'(x)\,dx=f(x)+C.$
3. $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx.$
4. $\int df(x)=f(x)+C.$

16.3.3. Integreerimise põhivalemid.

1. $\int 0\cdot dx=C.$
2. $\int dx=x+C.$
3. $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

5. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$ $(\alpha \neq 1)$

6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

8. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

10. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1.$

16.3.4. Integreerimisreeglid. Integreerimisel kasutatakse järgmisi integraali o m a d u s i:

1) $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, $c = \text{const}$;
2) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;
3) $\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

Nende seoste paremal poolel olevate integraalide eksisteerimisest järeldub vasaku poole eksisteerimine.

N ä i d e. $\int (x^2-3x+2)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int dx =$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

Ositi integreerimise valem.

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

ehk lühemalt:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

N ä i d e. Leida $\int \ln x\,dx$.

$$u = \ln x \mid du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = dx \quad v = x$$

Vastavalt valemile saame:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Muutuja vahetuse valem.

$$\int f[u(x)]\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

N ä i d e. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$

Teeme muutuja vahetuse, võttes $t = \cos x$. Sel juhul $dt = -\sin x\,dx$ ehk $\sin x\,dx = -dt$. Saame:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

16.4. MÄÄRATUD INTEGRAAL JA TEMA RAKENDUSI

16.4.1. Määratud integraali definitsioon. Lähtudes algfunktsioonide omadustest (art. 16.3.1., 5. omadus) defineeritakse määratud integraal järgmiselt.

Def. 1. Funktsiooni $y=f(x)$ **määratud integraaliks** lõigus $[a;\ b]$ nimetatakse avaldist $F(b)-F(a)$, kus $y=F(x)$ on antud funktsiooni algfunktsioon vaadeldavas lõigus.

Määratud integraali tähistatakse s ü m b o l i g a $\int_a^b f(x)\,dx$, mistõttu kehtib seos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

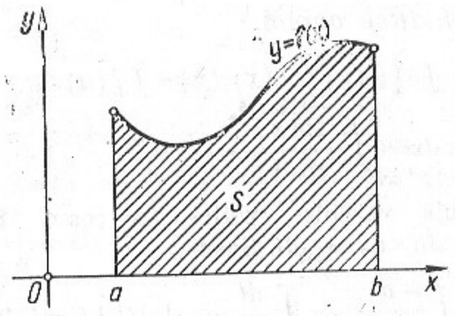
Viimast nimetatakse **Newton-Leibnizi valemiks.** Vahe $F(b)-F(a)$ tähistamiseks kasutatakse ka sümbolit $F(x)\big|_b^a$.

N ä i d e.

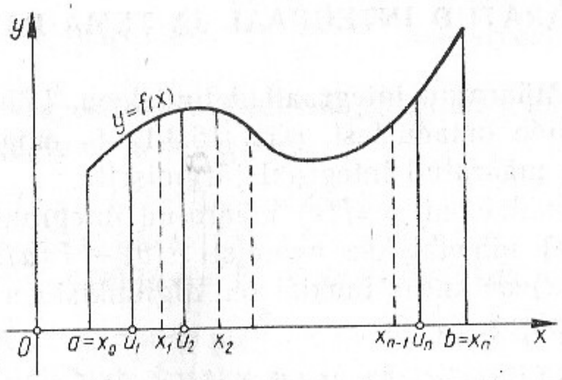
$$\int_0^2 3x^2\,dx = x^3\big|_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8.$$

Arvu a nimetatakse **integraali alumiseks rajaks** ja arvu b **ülemiseks rajaks,** funktsiooni f **integraali aluseks funktsiooniks** ning avaldist $f(x)\,dx$ **integraali aluseks avaldiseks.**

Määratud integraali leidmist nimetatakse samuti **integreerimiseks,** täpsemalt, integreerimiseks rajades a-st b-ni.



Joon. 16.12



Joon. 16.13

O m a d u s. Kui funktsioon $y=f(x)$ on pidev ja mittenegatiivne lõigus $[a;\ b]$, siis määratud integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

on võrdne selle kõvertrapetsi pindalaga S, mida piiravad jooned $x=a$, $x=b$, $y=0$ ja $y=f(x)$ (joon. 16.12).

Olgu funktsioon $y=f(x)$ määratud lõigus $[a;\ b]$. Jaotame lõigu $[a;\ b]$ osadeks (näiteks võrdseteks) punktidega (vt. joon. 16.13)

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Osalõigu $[x_{k-1};\ x_k]$ pikkuse tähistame sümboliga Δx_k, kusjuures $\lambda=\max \Delta x_k$. Igast osalõigust valime vabalt

mingi punkti u_k (näiteks $u_k=x_{k-1}$). Summat

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\,\Delta x_k$$

nimetatakse funktsiooni f **integraalsummaks** lõigus $[a;\ b]$.

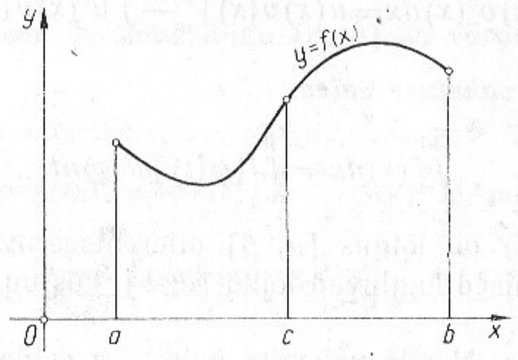
Def. 2. Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$, sõltumata lõigu $[a;\ b]$ jaotamise viisist ja punktide u_k valikust, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **määratud integraaliks** lõigus $[a;\ b]$.

Kui antud funktsioonil eksisteerib algfunktsioon, siis on definitsioonid 1 ja 2 samaväärsed.

Funktsiooni nimetatakse **integreeruvaks** vaadeldavas **lõigus,** kui temast eksisteerib määratud integraal selles lõigus.

16.4.2. Määratud integraali omadusi

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx.$
2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$ (joon. 16.14).
3. $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx\pm\int\limits_a^b g(x)\,dx.$
4. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx=k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, kus $k=\text{const}$.



Joon. 16.14

5. Kui $f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in [a; b]$ puhul, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

6. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$

7. Kui $g(x)$ säilitab märki lõigus $[a; b]$; ning $m \leqslant f(x) \leqslant M$, siis eksisteerib arv $\mu \in [m; M]$, et kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

J ä r e l d u s. Kui funktsioon $y=f(x)$ on pidev lõigus $[a; b]$, siis leidub arv $c \in [a; b]$, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$

8. Kui f on pidev lõigus $[a; b]$ ja $G(t) = \int_a^t f(x)\,dx$, siis

$$G'(t) = f(t) \quad \forall\, t \in [a; b].$$

M ä r k u s. Kõigi nende omaduste puhul on eeldatud, et vastavad integraalid eksisteerivad.

16.4.3. Määratud integraali arvutamine toimub Newton-Leibnizi valemist, eelmises artiklis toodud omadusi 1—4 ja järgmisi valemeid kasutades.

Positi integreerimise valem.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Muutuja vahetuse valem.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

kus $x=\varphi(t)$ on lõigus $[\alpha; \beta]$ diferentseeruv funktsioon, mille väärtused kuuluvad lõiku $[a; b]$, kusjuures $\varphi(\alpha)=a$ ja $\varphi(\beta)=b$.

M ä r k u s. Nende valemite puhul on eeldatud, et vastavad integraalid eksisteerivad.

N ä i d e 1. $\int_0^\pi x \sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,dx =$

$$\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array} \quad = -\pi\cos\pi + 0\cdot\cos 0 + \int_0^\pi \cos x\,dx =$$

$$= \pi + \sin x\,\Big|_0^\pi = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

N ä i d e 2. Leiame integraali $I = \int_0^2 \frac{dx}{2+3x}$.

Teeme muutuja vahetuse: $2+3x=t$, siis $(2+3x)'\,dx=dt$ ehk $3dx=dt$. Seega

$$I = \int_2^8 \frac{\frac{1}{3}\,dt}{t} = \frac{1}{3}\int_2^8 \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t\Big|_2^8 = \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 2) =$$

$$= \frac{1}{3}(3\ln 2 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

16.4.4. Määratud integraali ligikaudne arvutamine

Trapetsvalem. Jaotame lõigu $[a; b]$ n võrdseks osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ning olgu $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\ldots$, $y_n=f(x_n)$. Siis

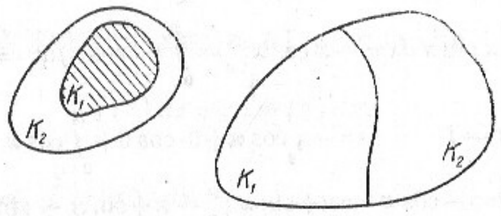
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Simpsoni valem. Jaotame lõigu $[a; b]$ $2n$ võrdseks osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

ning olgu $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\ldots$, $y_{2n}=f(x_{2n})$. Siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\Big[\frac{y_0+y_{2n}}{2} + 2(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}) + 4(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\Big].$$



Joon. 16.15

Simpsoni valem annab enamasti täpsema tulemuse, võrreldes trapetsvalemiga.

16.4.5. Tasandilise kujundi pindala arvutamine. Olgu K_1 ja K_2 tasandilised kujundid, millel on määratud pindalad $S(K_1)$ ja $S(K_2)$.

Pindala omadused (joon. 16.15).

1. $S(K) \geqslant 0$.
2. *Monotoonsus.* Kui $K_1 \subset K_2$, siis $S(K_1) \leqslant S(K_2)$.
3. *Aditiivsus.* Kui kujund K jaotub osadeks K_1 ja K_2, millel pole ühiseid sisepunkte, siis

$$S(K) = S(K_1) + S(K_2).$$

1. Joonisel 16.16 kujutatud kõvertrapetsi ($f(x) \geqslant 0$) pindala

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Joonisel 16.17 kujutatud kõvertrapetsi ($f(x) \leqslant 0$) pindala

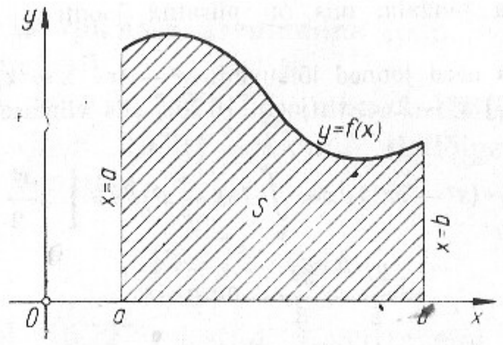
$$S = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Joonisel 16.18 kujutatud kõvertrapetsi ($g(y) \geqslant 0$) pindala

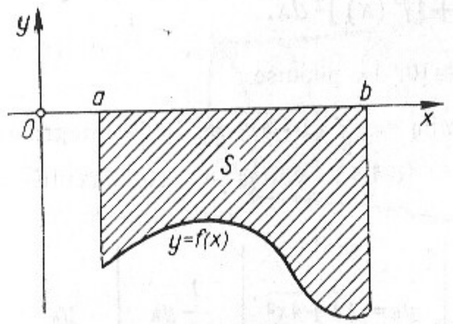
$$S = \int_c^d g(y)\,dy,$$

4. Joonisel 16.19 kujutatud kõvertrapetsi ($f(x) \geqslant g(x)$) pindala

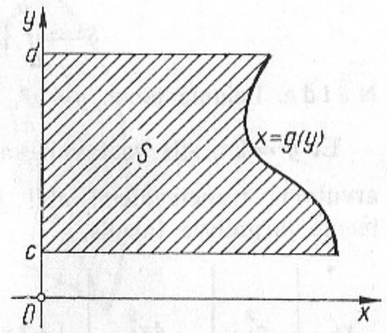
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$



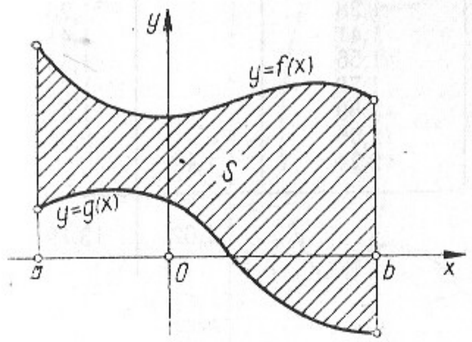
Joon 16.16



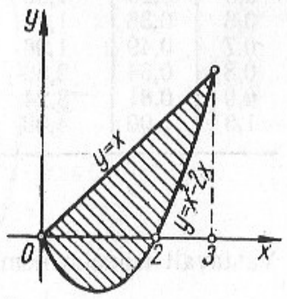
Joon. 16.17



Joon. 16.18



Joon. 16.19



Joon. 16.20

Näide. Leida pindala, mis on piiratud joontega $y=x^2-2x$ ja $y=x$.

Leiame, kus need jooned lõikuvad: $x^2-2x=x \Rightarrow x_1=0$ ja $x_2=3$. Et lõigus $[0;\ 3]$ $x^2-2x \leqslant x$ (joon. 16.20), siis viimase valemi põhjal

$$S=\int_0^3 [x-(x^2-2x)]\,dx=\int_0^3 (3x-x^2)\,dx=\left[3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=$$

$$=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-0+0=4\frac{1}{2}.$$

16.4.6. Joone kaare pikkuse arvutamine toimub järgmise valemi abil.

Kui joon on antud võrrandiga $y=f(x)$, $x \in [a;\ b]$, siis selle joone pikkus

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Näide. Leiame joone $y=x^2$, $x \in [0;\ 1]$, pikkuse.

Et $y'=2x$, siis vastavalt valemile $s=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$. Selle integraali arvutame trapetsvalemi abil (art. 16.4.4.), võttes $n=10$. Arvutused teeme järgmises tabelis.

x_k	x_k^2	$4x_k^2$	$1+4x_k^2$	$y_k=\sqrt{1+4x_k^2}$	$\frac{1}{2}y_k$	y_k
0,0	0,00	0,00	1,00	1,00	0,50	
0,1	0,01	0,04	1,04	1,02		1,02
0,2	0,04	0,16	1,16	1,08		1,08
0,3	0,09	0,36	1,36	1,17		1,17
0,4	0,16	0,64	1,64	1,28		1,28
0,5	0,25	1,00	2,00	1,41		1,41
0,6	0,36	1,44	2,44	1,56		1,56
0,7	0,49	1,96	2,96	1,72		1,72
0,8	0,64	2,56	3,56	1,89		1,89
0,9	0,81	3,24	4,24	2,06		2,06
1,0	1,00	4,00	5,00	2,24	1,12	
					1,62	13,19

Vastavalt trapetsvalemile

$$s=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 0{,}1\cdot(1{,}62+13{,}19) \approx 1{,}48.$$

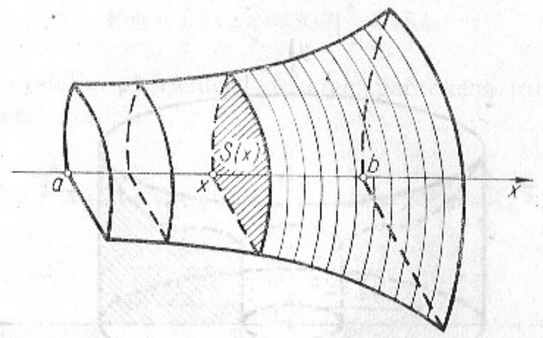
16.4.7. Keha ruumala arvutamine toimub sageli järgmiste valemite abil.

1. Kui vaadeldava keha lõikamisel x-teljega ristuvate tasanditega (joon. 16.21) tekkinud ristlõigete pindalad on $S(x)$, siis ruumala

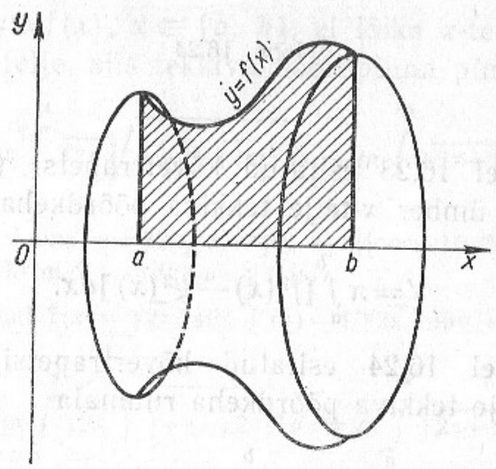
$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

2. Joonisel 16.22 esitatud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala

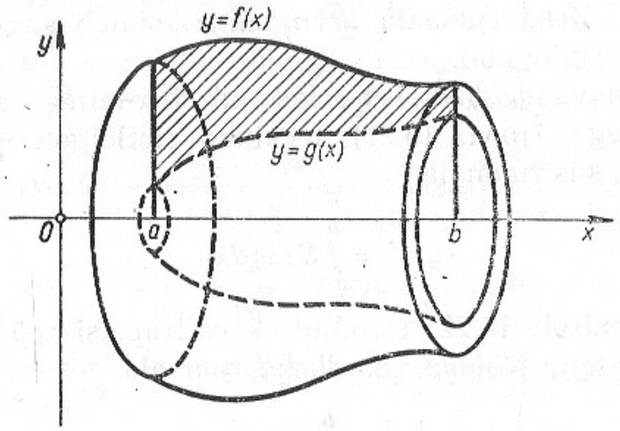
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$



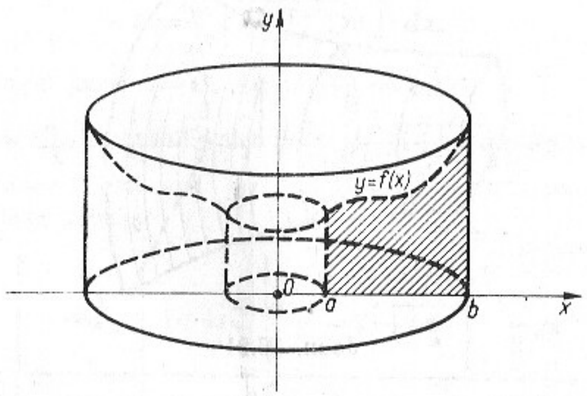
Joon. 16.21



Joon. 16.22



Joon. 16.23



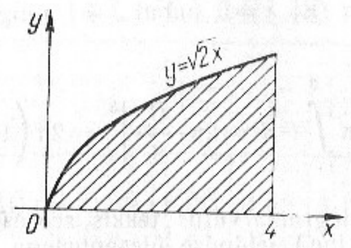
Joon. 16.24

3. Joonisel 16.23 esitatud kõvertrapetsi $(f(x) \geqslant g(x))$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala

$$V=\pi \int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\,dx.$$

4. Joonisel 16.24 esitatud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber y-telje tekkiva pöördkeha ruumala

$$V=2\pi \int_a^b xf(x)\,dx.$$



Joon. 16.25

N ä i d e. Leida joonisel 16.25 kujutatud kõvertrapetsi pöörlemisel ümber x-telje ja y-telje tekkivate pöördkehade ruumalad.

1. Ümber x-telje pöörlemisel tekkiva pöördkeha ruumala leiame teise valemi põhjal:

$$V=\pi \int_0^4 2x\,dx=\pi x^2\Big|_0^4=16\pi.$$

2. Ümber y-telje pöörlemisel tekkiva pöördkeha ruumala leiame neljanda valemi põhjal:

$$V=2\pi \int_0^4 x\sqrt{2x}\,dx=2\sqrt{2}\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx=2\sqrt{2}\pi \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi\cdot 32=\frac{128\sqrt{2}}{5}\pi.$$

16.4.8. Pöördpinna pindala arvutamine on võimalik järgmise valemiga.

Kui joon $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, ei lõika x-telge ja pöörleb ümber x-telje, siis tekkiva pöördpinna pindala

$$S=2\pi \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{1+(1/\sqrt{2x})^2}\,dx=2\pi \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx.$$

N ä i d e. Leida joone $y=\sqrt{2x}$, $x\in[0;\ 4]$ (joon. 16.25), pöörlemisel ümber x-telje tekkinud pöördpinna pindala.

Et antud juhul $f(x)=\sqrt{2x}$, siis $f'(x)=1/\sqrt{2x}$ ning esimese valemi põhjal

$$S=2\pi \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{1+(1/\sqrt{2x})^2}\,dx=2\pi \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx.$$

Selle integraali arvutamisel teeme muutuja vahetuse $2x+1=t^2$. Siis

$2dx=2tdt$ ehk $dx=tdt$. Et $x=0$ puhul $t=1$ ning $x=4$ puhul $t=3$, siis

$$S=2\pi\int_1^3 t\cdot t\,dt=2\pi\int_1^3 t^2\,dt=2\pi\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_1^3=2\pi\left(9-\frac{1}{3}\right)=\frac{52}{3}\pi.$$

16.4.9. Ajaloost. Integraalarvutus tekkis seoses pindalade (samuti ruumala, masskeskme jne.) leidmise ülesannetega. Üldisi ideid nende ülesannete lahendamiseks esines juba antiik-kreeka matemaatiku Archimedese (u. 287—212 e.m.a.) töödes. Tema ideid täiendas oluliselt saksa astronoom ja matemaatik J. Kepler (1571—1630), eriti aga Galilei õpilane itaalia matemaatik F. B. Cavalieri (u. 1598—1647). Cavalieri idee seisnes selles, et ta vaatles tasandilist kujundit koosnevana paralleelsetest lõikudest, ruumilist kujundit aga koosnevana tasandilistest lõigetest. Prantsuse matemaatik P. Fermat (1601—1665) kasutas seoses pindalade arvutamisega juba koordinaatide meetodit. Tema meetod põhines sisuliselt sellel, et pindala leiti integraalsummade piirväärtusena, kuigi piirväärtuse mõistet ta veel ei tundnud.

Newtoni õpetaja, inglise matemaatik I. Barrow (1630—1677) näitas, et puutuja leidmise ülesanne on pindala leidmise ülesande pöördülesanne. Tänapäeval ütleme nii, et diferentseerimine ja integreerimine on teineteise pöördoperatsioonid. See kõik oli eelduseks, millele tuginedes loodi aastail 1665—1666 diferentsiaal- ja integraalarvutus. Seda tegid teineteisest sõltumatult I. Newton (1643—1727) ja G. W. Leibniz (1646—1716). Alles XIX sajandil põhjendati uusi meetodeid piirväärtuse mõistet kasutades. Suurimaid teeneid selles on prantsuse matemaatikul A. L. Cauchy'l (1789—1857).

Katkevate funktsioonide integreerimist vaatlesid saksa matemaatik B. Riemann (1826—1866) ja prantsuse matemaatik I. G. Darboux (1842—1917). Katkevate funktsioonide integreerimise nüüdisaegse teooria lõi prantsuse matemaatik H. Lebesgue (1875—1941).

17. TABELID

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	e^x	$\ln x$
0,1	0,01	0,00	10,00	0,32	1,00	0,46	1,00	2,15	1,11	—2,30
0,2	0,04	0,01	5,00	0,45	1,41	0,58	1,26	2,71	1,22	—1,71
0,3	0,04	0,03	3,33	0,55	1,73	0,67	1,44	3,11	1,35	—1,20
0,4	0,16	0,06	2,50	0,63	2,00	0,74	1,59	3,42	1,49	—0,92
0,5	0,25	0,12	2,00	0,71	2,24	0,79	1,71	3,68	1,65	—0,69
0,6	0,36	0,22	1,67	0,77	2,45	0,84	1,82	3,92	1,82	—0,51
0,7	0,49	0,34	1,43	0,84	2,65	0,89	1,91	4,12	2,01	—0,36
0,8	0,64	0,51	1,25	0,89	2,83	0,93	2,00	4,31	2,23	—0,22
0,9	0,81	0,73	1,11	0,95	3,00	0,97	2,08	4,48	2,46	—0,10
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	2,72	0,00
1,1	1,21	1,33	0,91	1,05	3,32	1,03	2,22	4,79	3,00	0,09
1,2	1,44	1,73	0,83	1,10	3,46	1,06	2,29	4,93	3,32	0,18
1,3	1,69	2,20	0,77	1,14	3,61	1,09	2,35	5,07	3,67	0,26
1,4	1,96	2,74	0,71	1,18	3,74	1,12	2,41	5,19	4,06	0,34
1,5	2,25	3,38	0,67	1,22	3,87	1,14	2,47	5,31	4,48	0,41
1,6	2,56	4,10	0,62	1,26	4,00	1,17	2,52	5,43	4,95	0,47
1,7	2,89	4,91	0,59	1,30	4,12	1,19	2,57	5,54	5,47	0,53
1,8	3,24	5,83	0,56	1,34	4,24	1,22	2,62	5,65	6,05	0,59
1,9	3,61	6,86	0,53	1,38	4,36	1,24	2,67	5,75	6,69	0,64
2,0	4,00	8,00	0,50	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	7,39	0,69
2,1	4,41	9,26	0,48	1,45	4,58	1,28	2,76	5,94	8,17	0,74
2,2	4,84	10,65	0,45	1,48	4,69	1,30	2,80	6,04	9,02	0,79
2,3	5,29	12,17	0,43	1,52	4,80	1,32	2,84	6,13	9,97	0,83
2,4	5,76	13,82	0,42	1,55	4,90	1,34	2,88	6,21	11,02	0,87
2,5	6,25	15,62	0,40	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	12,18	0,92
2,6	6,76	17,58	0,38	1,61	5,10	1,38	2,96	6,38	13,46	0,96
2,7	7,29	19,68	0,37	1,64	5,20	1,39	3,00	6,46	14,88	0,99
2,8	7,84	21,95	0,36	1,67	5,29	1,41	3,04	6,54	16,44	1,03
2,9	8,41	24,39	0,34	1,70	5,38	1,43	3,07	6,62	18,17	1,06
3,0	9,00	27,00	0,33	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	20,09	1,10
3,1	9,61	29,79	0,32	1,76	5,57	1,46	3,14	6,77	22,20	1,13
3,2	10,24	32,77	0,31	1,79	5,66	1,47	3,18	6,84	24,53	1,16
3,3	10,89	35,94	0,30	1,82	5,74	1,49	3,21	6,91	27,11	1,19
3,4	11,56	39,30	0,29	1,84	5,83	1,50	3,24	6,98	29,96	1,22
3,5	12,25	42,88	0,29	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	33,11	1,25
3,6	12,96	46,66	0,28	1,90	6,00	1,53	3,30	7,11	36,60	1,28
3,7	13,69	50,65	0,27	1,92	6,08	1,55	3,33	7,18	40,45	1,31
3,8	14,44	54,87	0,26	1,95	6,16	1,56	3,36	7,24	44,70	1,34

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	e^x	$\ln x$
3,9	15,21	59,32	0,26	1,97	6,24	1,57	3,39	7,31	49,40	1,36
4,0	16,00	64,00	0,25	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	54,60	1,39
4,1	16,81	68,92	0,24	2,02	6,40	1,60	3,45	7,43	60,34	1,41
4,2	17,64	74,09	0,24	2,05	6,48	1,61	3,48	7,49	66,69	1,44
4,3	18,49	79,51	0,23	2,07	6,56	1,63	3,50	7,55	73,70	1,46
4,4	19,36	85,18	0,23	2,10	6,63	1,64	3,53	7,61	81,45	1,48
4,5	20,25	91,12	0,22	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	90,02	1,50
4,6	21,16	97,34	0,22	2,14	6,78	1,66	3,58	7,72	99,48	1,53
4,7	22,09	103,8	0,21	2,17	6,86	1,68	3,61	7,78	110,0	1,55
4,8	23,04	110,6	0,21	2,19	6,93	1,69	3,63	7,83	121,5	1,57
4,9	24,01	117,6	0,20	2,21	7,00	1,70	3,66	7,88	134,3	1,59
5,0	25,00	125,0	0,20	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	148,4	1,61
5,1	26,01	132,7	0,20	2,26	7,14	1,72	3,71	7,99	164,0	1,63
5,2	27,04	140,6	0,19	2,28	7,21	1,73	3,73	8,04	181,2	1,65
5,3	28,09	148,9	0,19	2,30	7,28	1,74	3,76	8,09	200,3	1,67
5,4	29,16	157,5	0,18	2,32	7,35	1,75	3,78	8,14	221,4	1,69
5,5	30,25	166,4	0,18	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	244,7	1,70
5,6	31,36	175,6	0,18	2,37	7,48	1,78	3,83	8,24	270,4	1,72
5,7	32,49	185,2	0,17	2,39	7,55	1,79	3,85	8,29	298,9	1,74
5,8	33,64	195,1	0,17	2,41	7,62	1,80	3,87	8,34	330,3	1,76
5,9	34,81	205,4	0,17	2,43	7,68	1,81	3,89	8,39	365,0	1,78
6,0	36,00	216,0	0,17	2,45	7,75	1,82	3,92	8,43	403,4	1,79
6,1	37,21	227,0	0,16	2,47	7,81	1,83	3,94	8,48	445,9	1,81
6,2	38,44	238,3	0,16	2,49	7,87	1,84	3,96	8,53	492,8	1,82
6,3	39,69	250,0	0,16	2,51	7,94	1,85	3,98	8,57	544,6	1,84
6,4	40,96	262,1	0,16	2,53	8,00	1,86	4,00	8,62	601,8	1,86
6,5	42,25	274,6	0,15	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	665,1	1,87
6,6	43,56	287,5	0,15	2,57	8,12	1,88	4,04	8,71	735,1	1,89
6,7	44,89	300,8	0,15	2,59	8,18	1,89	4,06	8,75	812,4	1,90
6,8	46,24	314,4	0,15	2,61	8,25	1,89	4,08	8,79	897,8	1,92
6,9	47,61	328,5	0,14	2,63	8,31	1,90	4,10	8,84	992,3	1,93
7,0	49,00	343,0	0,14	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	1097	1,95
7,1	50,41	357,9	0,14	2,66	8,43	1,92	4,14	8,92	1212	1,96
7,2	51,84	373,2	0,14	2,68	8,48	1,93	4,16	8,96	1339	1,97
7,3	53,29	389,0	0,14	2,70	8,54	1,94	4,18	9,00	1480	1,99
7,4	54,76	405,2	0,13	2,72	8,60	1,95	4,20	9,04	1636	2,00
7,5	56,25	421,9	0,13	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	1808	2,01
7,6	57,76	439,0	0,13	2,76	8,72	1,97	4,24	9,13	1998	2,03
7,7	59,29	456,5	0,13	2,77	8,78	1,97	4,25	9,17	2208	2,04
7,8	60,84	474,6	0,13	2,79	8,83	1,98	4,27	9,20	2441	2,05

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	e^x	$\ln x$
7,9	62,41	493,0	0,13	2,81	8,89	1,99	4,29	9,24	2697	2,07
8,0	64,00	512,0	0,12	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	2981	2,08
8,1	65,61	531,4	0,12	2,85	9,00	2,01	4,33	9,32	3294	2,09
8,2	67,24	551,4	0,12	2,86	9,06	2,02	4,34	9,36	3641	2,10
8,3	68,89	571,8	0,12	2,88	9,11	2,02	4,36	9,40	4024	2,12
8,4	70,56	592,7	0,12	2,90	9,16	2,03	4,38	9,44	4447	2,13
8,5	72,25	614,1	0,12	2,92	9,22	2,04	4,40	9,47	4915	2,14
8,6	73,96	636,1	0,12	2,93	9,27	2,05	4,41	9,51	5432	2,15
8,7	75,69	658,5	0,11	2,95	9,33	2,06	4,43	9,55	6003	2,16
8,8	77,44	681,5	0,11	2,97	9,38	2,06	4,45	9,58	6634	2,17
8,9	79,21	705,0	0,11	2,98	9,43	2,07	4,46	9,62	7332	2,19
9,0	81,00	729,0	0,11	3,00	9,49	2,08	4,48	9,66	8103	2,20
9,1	82,81	753,6	0,11	3,02	9,54	2,09	4,50	9,69	8955	2,21
9,2	84,64	778,7	0,11	3,03	9,59	2,10	4,51	9,73	9897	2,22
9,3	86,49	804,4	0,11	3,05	9,64	2,10	4,53	9,76	10938	2,23
9,4	88,36	830,6	0,11	3,07	9,70	2,11	4,55	9,80	12088	2,24
9,5	90,25	857,4	0,11	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	13360	2,25
9,6	92,16	884,7	0,10	3,10	9,80	2,13	4,58	9,86	14765	2,26
9,7	94,09	912,7	0,10	3,11	9,85	2,13	4,60	9,90	16318	2,27
9,8	96,04	941,2	0,10	3,13	9,90	2,14	4,61	9,93	18034	2,28
9,9	98,01	970,3	0,10	3,15	9,95	2,15	4,63	9,97	19930	2,29
10,0	100,0	1000	0,10	3,16	10,0	2,15	4,64	10,0	22026	2,30

x	sin x	cos x	tan x	cot x	arcsin x	arccos x	arctan x	arccot x
0,0	0,00	1,00	0,00	∞	0,00	1,57	0,00	1,57
0,1	0,10	1,00	0,10	9,97	0,10	1,47	0,10	1,47
0,2	0,20	0,98	0,20	4,93	0,20	1,37	0,20	1,37
0,3	0,30	0,96	0,31	3,23	0,30	1,27	0,29	1,28
0,4	0,39	0,92	0,42	2,37	0,41	1,16	0,38	1,19
0,5	0,48	0,88	0,55	1,83	0,52	1,05	0,46	1,11
0,6	0,56	0,83	0,68	1,46	0,64	0,93	0,54	1,03
0,7	0,64	0,76	0,84	1,19	0,78	0,80	0,61	0,96
0,8	0,72	0,70	1,03	0,97	0,93	0,64	0,67	0,90
0,9	0,78	0,62	1,26	0,79	1,12	0,45	0,73	0,84
1,0	0,84	0,54	1,56	0,64	1,57	0,00	0,79	0,79
1,1	0,89	0,45	1,96	0,51	—	—	0,83	0,74
1,2	0,93	0,36	2,57	0,39	—	—	0,88	0,69
1,3	0,96	0,27	3,60	0,28	—	—	0,91	0,66
1,4	0,99	0,17	5,80	0,17	—	—	0,95	0,62
1,5	1,00	0,07	14,10	0,07	—	—	0,98	0,59
$\frac{\pi}{2}$	1,00	0,00	∞	0,00	—	—	1,00	0,57

18. MÕÕTÜHIKUD

18.1. SI-SÜSTEEM

Mõõtmiseks nimetatakse mingi suuruse võrdlemist mõõtühikuga, kusjuures mõõtühik on sama suuruse (pikkus, mass jne.) kokkuleppeline väärtus.

XI rahvusvahelisel mõõtude ja kaalude alasel peakonverentsil 1960. aasta oktoobris võeti vastu uus rahvusvaheline mõõtühikute süsteem (The International System of Units), mida lühendatult tähistatakse sümboliga SI. Nõukogude Liidus hakkas SI-süsteem kehtima alates 1. jaanuarist 1963. a. SI-süsteemis on seitse põhisuurust ja kaks täiendavat matemaatilist suurust (nurk ja ruuminurk).

Põhisuurusi	Ühik	Lühend
pikkus	meeter	m
mass	kilogramm	kg
nurk	radiaan	rad
ruuminurk	steradiaan	sr

Kui uutes ühikutes väljendatud mõõtmistulemused on liiga väikesed või liiga suured, võib kasutada mõõtühikute kümnekordseid suurusi. Vastavad nimetused saadakse, kasutades alljärgnevas tabelis esitatud eesliiteid.

Eesliite nimetus	Eesliite lühend	Mõõtühiku kordsus
tera-	T	10^{12}
giga-	G	10^{9}
mega-	M	10^{6}
kilo-	k	10^{3}
hekto-	h	10^{2}

deka-	*da*	10
detsi-	*d*	10^{-1}
senti-	*c*	10^{-2}
milli-	*m*	10^{-3}
mikro-	*μ*	10^{-6}
nano-	*n*	10^{-9}
piko-	*p*	10^{-12}
femto-	*f*	10^{-15}
ato-	*a*	10^{-18}

Ei ole lubatud kasutada eesliiteid selliste ühikute ees, mis on juba mõõtühiku kordsed. Näiteks ei tohi kasutada «millimikron», «megakilogramm».

18.2. MITTESÜSTEEMILISED MÕÕDUD

Pikkusmõõdud

1 liin (‴) = 2,54 mm
1 toll (″) = 2,54 cm
1 jalg (′) = 30,48 cm
1 küünar = 53,33 cm
1 arssin = 71,12 cm
1 süld = 2,13 m
1 verst = 1,067 km
1 penikoorem = 7,467 km
1 inglise jard (yard, yd) = 91,44 cm
1 inglise miil (mile, mi) = 1,61 km
1 inglise meremiil = 1,852 km
1 geograafiline miil = 7,42 km

Pinnamõõdud

1 aar (a) = 100 m^2
1 hektar (ha) = 100 aari = 0,9153 tiinu = 10000 m^2
1 tessatin (tiin) = 10925 m^2
1 riia vakamaa = 2,04 tallinna vakamaad = 3700 m^2
1 tallinna vakamaa = 1800 m^2
1 ruutsüld = 4,55 m^2

1 ruutarssin = 0,51 m^2
1 ruutjalg = 929,0 cm^2
1 inglise aaker (acre, a) = 4050 m^2

Ruumalamõõdud

1 liiter (l) = 1 dm^3
1 setvert = 0,21 m^3 = 210 l
1 setverik = 0,0262 m^3 = 26,2 l
1 karnits = 3,28 l
1 külimit = 13,12 l
1 tallinna vakk = 44,28 l
1 riia vakk = 66,41 l
1 tünder = 157,43 l
1 toop = 1,23 l
1 pang = 12,3 l
1 vaat = 492 l
1 buššel = 36,4 l
1 gallon (gal) = 4,55 l
1 inglise kvart = 1,14 l
1 pint = 0,57 l

Massimõõdud

1 tonn (t) = 1000 kg
1 tsentner (ts) = 100 kg
1 puud = 16,38 kg
1 nael = 409,51 g
1 leisik (pund) = 8,16 kg
1 lood = 12,80 g
1 solotnik = 4,27 g
1 dool = 0,04443 g = 44,43 mg
1 inglise nael (pound) = 453,59 g
1 inglise unts = 28,35 g

REGISTER

Abeli rühm 2.3.3.
abivalemid 5.5.8.
absoluutne viga 5.2.2., 16.1.7.
absoluutväärtus 3.6.2.
abstsiss 14.1.2., 14.1.3.
abstsisstelg 14.1.2.
aditiivne poolrühm 2.3.2.
afiinsed teisendused 10.15.8.
aksiomaatika 9.3., 9.4.2., 9.4.3., 9.4.4.
aksiomaatiline meetod 9.3.
aksioom 9.3., 9.4.2., 9.4.3., 9.4.4.
algarv 3.3.3.
algebraline avaldis 5.5.1.
algebraline murd 5.5.6.
— operatsioon 2.3.1.
— struktuur 2.3.1.
— summa 5.5.3.
— võrrand 6.1.4., 6.5.1.
algebra põhiteoreem 6.5.2.
algfunktsioon 16.3.1.
algmõiste 9.2.1., 9.3., 9.4.3., 9.4.4.
algtegureiks lahutamine 3.3.5.
alumine raja 3.6.3.
— tõke 3.6.3.
analüütiline avaldis 5.5.1.
—. esitus 2.4.4.
— geomeetria 9.5.
Anaxagoras 9.5.
antirefleksiivsus 2.1.3.
antisümmeetrilisus 2.1.3.
aplikaat 14.1.3.
Apollonios 9.5.
Archimedes 9.5., 16.4.9.
argument 2.4.2.
argumendi muut 16.1.1.
Aristoteles 9.5.
aritmeetika põhioperatsioonid 3.2.1.
— põhiseadused 3.2.2.
aritmeetiline jada 5.9.1.
— keskmine 5.8.1.
— tehe 3.2.1.
aritmeetilise jada summa 5.9.1.
— — vahe 5.9.1.
— — üldliige 5.9.1.
arkusfunktsioonid 15.8.
arkuskoosinus 15.8.2.
arkuskootangens 15.8.4.
arkussiinus 15.8.1.
arkustangens 15.8.3.
arv e 4.3., 5.7.1.
arv π 10.13.5.
arvfunktsioon 2.4.2.
arvu ristsumma 3.3.4.
arvutusseadused 2.3.4., 3.2.2.
arvu ümardamine 5.2.1.
assotsiatiivsus 2.3.1.
aste 5.6.1.
astendaja 5.6.1.
astendamine 5.6.1.
astendatav 5.6.1.
astme alus 5.6.1.
astmefunktsioon 15.3., 15.11.
astmenäitaja 5.6.1.
asümptoot 14.2.8.
Barrow 16.4.9.
Bernoulli 8.2.1.
Bezout' teoreem 5.5.7.
binoomkordajad 8.1.7.
biruutvõrrand 6.3.4.
Bolyai 9.5.
Bolzano 4.7.
Bolzano-Cauchy teoreem 4.6.2.
Cantor 3.8.
Cardano 3.8.
— valemid 6.4.
Cauchy 4.2.1., 4.5.1., 4.7., 16.1.12.
Cavalieri 11.8., 16.4.9.
— printsiip 11.8.
Darboux 16.4.9.
Dedekind 3.8.
definitsioon 9.2.1., 9.3.
Desargues 9.5.
Descartes 2.4.8., 3.8., 9.5., 14.1.
determinandi element 5.10.1., 5.10.2.
— kõrvaldiagonaal 5.10.1., 5.10.2.
— peadiagonaal 5.10.1, 5.10.2.

— rida 5.10.1., 5.10.2.
— veerg 5.10.1., 5.10.2.
diagramm 2.4.4.
diferentseerimine 16.1.1.
diferentseeruv funktsioon 16.1.1.
diferentsiaal 16.1.6.
diferentsiaalgeomeetria 9.5.
diferentsiaali geomeetriline tähendus 16.1.6.
Dirichlet 2.4.8.
diskriminant 6.3.1., 6.3.2., 6.4.
distributiivsus 2.3.4., 3.2.2.
dodekaeeder 11.16.5.
eeldus 9.2.2.
eksistentsikvantor 1.2.
eksponentfunktsioon 15.5.
eksponentvõrrand 6.8.
ekstreemumkoht 16.2.2.
ekstreemumpunkt 16.2.2.
ekvivalents 2.1.4.
ekvivalentsed hulgad 1.5.1.
— võrrandid 6.1.2.
ekvivalentsiklassid 2.1.4.
ekvivalentsiseos 2.3.4.
elementaarfunktsioon 15.9.1.
ellips 14.2.7.
ellipsi fookused 14.2.7.
— kanooniline võrrand 14.2.7.
— pindala 14.2.7.
— poolteljed 14.2.7.
— võrrand 14.2.7.
erinimelised murrud 5.1.1.
esimese astme võrratus 7.2.1.
esimest liiki katkevuspunkt 4.5.3.
Eukleides 9.4.1., 9.5.
Eukleidese algoritm 3.3.6.
— teoreem 10.7.13.
Euler 3.8.
Euleri lause 11.7.1.
— sirge 10.7.4.
faktoriaal 8.1.2.
Fermat 8.1.1., 8.2.1., 9.5., 14.1., 16.4.9.
funktsionaalne seos 2.1.2.
funktsioon 2.4.2.
funktsiooni ahend 15.4., 15.8.
— argument 2.1.2.
funktsioonide jagatis 2.4.5.
— kompositsioon 2.4.6.
— korrutis 2.4.5.
— summa 2.4.5.
— vahe 2.4.5.
— võrdsus 2.4.5.
funktsiooni diferentsiaal 16.1.6.
— graafik 2.4.3.
— hüpe 4.5.3.
— katkevuspunkt 4.5.3.
— käänupunkt 16.2.4.
— monotoonsuse tunnus 16.2.1.
— muut 16.1.1.
— muutumispiirkond 2.4.2.
— määramispiirkond 2.4.2.
— periood 15.1.3.
— pidevus 4.5.1.
— piirväärtus 4.2.1., 4.2.3.
— tuletis 16.1.1.
— väärtus 2.4.2.
— väärtuste hulk 2.4.2.
— ühepoolne pidevus 4.5.2.
Gauss 9.5.
geomeetria 9.1.1., 9.5.
— aksiomatiseerimine 9.4.
geomeetriline jada 5.9.2.
— keha 11.1.
— keskmine 5.8.2.
— kujund 9.1.2.
— rida 5.9.3.
geomeetrilise jada summa 5.9.2.
— — tegur 5.9.2.
— — üldliige 5.9.2.
— rea summa 5.9.3.
Gibbs 13.3.1.
graafik 2.4.3.
Grassmann 13.3.1.
Guldin 11.7.3.
Guldini lause 11.7.3.
hajuv jada 4.1.1.
Hamilton 13.3.1.
harilik murd 3.5.1.
Heine 4.2.1., 4.5.1.
Hilbert 9.4.1., 9.5.
Hippokrates 9.5.
homoteetsus 10.4.2., 11.23.
homoteetsuskeskpunkt 10.15.6., 11.23.
homoteetsustegur 10.15.6., 11.23.
hulga element 1.3.1.
— täiend 1.4.4.
hulkade ristkorrutis 1.4.5.
— vahe 1.4.3.
— ühend 1.4.1.
— ühisosa 1.4.2.
hulkliige 5.5.5.
hulknurga apoteem 10.6.4.
— diagonaal 10.6.2.
— nurk 10.6.2.
hulknurgareegel 13.1.3.
hulknurga sisenurk 10.6.2.
— sisepiirkond 10.6.2.
— siseringjoon 10.6.4., 10.13.4.
— välisnurk 10.6.2.
— ümbermõõt 10.6.2.
— ümberringjoon 10.6.4., 10.13.4.
hulknurk 10.6.2.
hulknurkade liigitamine 10.6.2.
— sarnasus 10.6.3.
hulktahukas 11.7.1.
Huygens 8.1.1., 8.2.1.
hüperbool 9.5., 14.2.8.
hüperbooli asümptoodid 14.2.8.
— fookused 14.2.8.
— imaginaarne pooltelg 14.2.8.
— reaalne pooltelg 14.2.8.
— võrrand 14.2.8.
ikosaeeder 11.16.6.
ilmutamata funktsioon 2.4.4.
— funktsiooni tuletis 16.1.9.
imaginaarosa 3.7.1.
imaginaartelg 3.7.1.
imaginaarühik 3.7.1.
implikatsioon 1.2.
indeks 1.6.2.
integraali alumine raja 16.4.1.
— alune avaldis 16.4.1.
— — funktsioon 16.4.1.
— rajad 16.4.1.
— ülemine raja 16.4.1.
integraalsumma 16.4.1.
integreerimine 16.3.2., 16.4.1.
integreeruv funktsioon 16.4.1.
irratsionaalarv 3.1.2.. 3.6.1.
irratsionaalne avaldis 5.5.1.
isekülgne kolmnurk 10.7.2.
isenimelised murrud 5.1.1.
jada 1.6.2.
— piirväärtus 4.1.1.
— tegur 5.9.2.
— vahe 5.9.1.
jagaja 3.2.1.
jagamine 3.2.1.
jagatav 3.2.1.
jagatis 3.2.1.
jagatise tuletis 16.1.2.
joone kaare pikkus 16.4.6.
— normaal 16.1.11.
— puutuja 16.1.10.
— võrrand 14.2.2.
juhuslik muutuja 8.2.6.
— suurus 8.2.6.
— sündmus 8.2.2.
juur 5.6.3.
juure laiendamine 5.6.4.
— sümbol 5.6.3.
— taandamine 5.6.4.
juurfunktsioon 15.4.
juurija 5.6.3.
juurimine 5.6.3.
juuritav 5.6.3.
juurvõrrand 6.7.
järguühik 5.7.2.
järjestuse aksioomid 9.4.4.
järjestusseos 2.3.5.
jäägiga jagamine 3.3.2.
jääk 3.3.2.
kaarekraad 10.13.2.
kaareradiaan 10.5.2., 10.13.2.
kaaskompleksarv 3.7.1.
kaasnurgad 10.5.12., 10.5.13.
kahanev funktsioon 15.1.5.
— jada 4.1.2.
kahekordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid 12.8.
kaheksandsüsteem 3.1.2.
kahendsüsteem 3.1.2.
kahe nurga summa trigonomeetrilised funktsioonid 12.7.
— — vahe trigonomeetrilised funktsioonid 12.7.
kaherealine determinant 5.10.1.
kahetahuline nurk 11.6.
kahetahulise nurga mõõtmine 11.6.2.
kahe muutujaga lineaarvõrratus 7.3.1.
kaldkoonus 11.18.2.
kaldprojektsioon 11.5.1.
kaldsilinder 11.17.2.
kasvav funktsioon 15.1.5.
— jada 4.1.2.
kaugus 9.4.4.
Kepler 16.4.9.
kera 11.20.1.
— kiht 11.20.3.
— segment 11.20.2.
— sektor 11.20.4.
— vöö 11.20.3., 11.21.3.
keskmine võrdeline 5.8.2.
kesknurk 10.5.6.
keskristsirge 10.3.4.
kiht 11.20.3.
kiir 9.1.3.
kiirte kimp 10.2.
kiirteteoreem 10.5.16.
kiivsirged 11.2.2.
kindel sündmus 8.2.2.
kinnine murdjoon 10.6.1.
— poolruum 9.1.5.
— poolsirge 9.1.3.
— pooltasand 9.1.4.
kitsenduste süsteem 7.3.3.
klassijaotus 2.1.4.
klassijaotuse aksioomid 2.1.4.

kohavektor 13.2.1., 13.2.2.
kollineaarsed vektorid 13.1.2.
kollineaarsuse tunnus 13.2.3.
kolmandat järku determinant 5.10.2.
kolmerealine determinant 5.10.2.
kolme ristsirge teoreem 11.4.4.
kolmnurga elemendid 10.7.1.
— kesklõik 10.7.4.
— külje keskristsirge 10.7.4.
— kõrgus 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
— külgringjoon 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
— küljed 10.7.1., 10.7.2., 10.7.3.
— lahendamine 10.7.8.
— nurgad 10.7.1., 10.7.2., 10.7.3.
— omadusi 10.7.3.
— ortotsenter 10.7.4.
— pindala 10.7.7.
kolmnurgareegel 13.1.3., 13.1.4.
kolmnurga siseringjoon 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
— välisnurk 10.7.3.
— ümberringjoon 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
kolmnurk 10.7.
kolmnurkade liigitamine 10.7.2.
— sarnasus 10.7.10.
— kongruentsus 10.7.9., 10.7.13.
Kolmogorov 9.4.4.
kombinatoorika 8.1., 8.1.1.
kombinatsioonid 8.1., 8.1.5.
kommutatiivne korpus 2.3.5.
— poolrühm 2.3.2.
— ring 2.3.4.
— rühm 2.3.3.
kommutatiivsus 2.3.1.
komplanaarsed sirged 11.2.2.
— vektorid 13.1.9.
komplanaarsuse tunnus 13.2.6.
kompleksarv 3.7.1.
kompleksarvu argument 3.7.3.
— imaginaarosa 3.7.1.
— moodul 3.7.3.
— reaalosa 3.7.1.
— trigonomeetriline kuju 3.7.3.
kompleksтasand 3.7.1.
kompositsioon 2.4.6.
kongruentsed kujundid 11.23.
konstant 2.4.1.
konstantne suurus 2.4.1.
kontiinumi võimsusega hulk 1.5.2.
koondamine 5.5.3.
koonduv geomeetriline rida 5.9.3.
— jada 4.1.1.
kooniline pind 11.18.1.
koonus 11.18.2.
koonuslõiked 9.5.
koordinaatide meetod 9.5.
koordinaattasand 14.1.2.
koordinaatteljed 14.1.2.
koosinus 12.2.1., 12.3.2.
koosinusfunktsioon 15.7.2.
koosinusteoreem 10.7.6.
kootangens 12.2.1., 12.3.2.
kootangensfunktsioon 15.7.4.
kordarv 3.3.3.
kordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid 12.8.
kordumistega ühendid 8.1.1.
korpus 2.3.5.
korrapärane hulknurk 10.6.4., 10.6.5.
— prisma 11.9.2.
— püramiid 11.13.2.
korrutamine 3.2.1.
korrutamise assotsiatiivsus 2.3.4., 3.2.2.
— kommutatiivsus 2.3.4., 3.2.2.
— reegel kombinatoorikas 8.1.6.
korrutis 3.2.1.
korrutise tuletis 16.1.2.
kraad 10.5.2.
kraadimõõt 10.5.2.
kriitiline punkt 16.2.2.
Krõlov 5.2.4.
kujundi orientatsioon 10.15.4.
kujutav geomeetria 9.5.
kujutis 1.6.1.
kujutus 1.6.
— hulgale 1.6.
— hulka 1.6.
kuldlõige 10.5.17.
kumer funktsioon 16.2.3.
— hulk 7.3.2.
— hulknurk 10.6.2.
— murdjoon 10.6.1.
kuup 11.12., 11.16.3.
kuupfunktsioon 15.3.2.
kuupjuur 5.6.3., 15.4.2.
kuupparabool 15.3.2.
kuuppolünoom 5.5.7., 15.10.2.
kuupvõrrand 6.4.
kuupvõrrandi diskriminant 6.4.
kõrgema astme võrrand 6.5.
— — võrratus 7.2.3.
kõrgemat järku tuletis 16.1.8.

kõrvaldatav katkevus 4.5.3.
kõrvunurgad 10.5.10.
kõvertrapetsi pindala 16.4.5.
kõõl 10.13.
kõõlhulknurk 10.6.4., 10.13.4.
käänupunkt 16.2.4.
kümnendlogaritm 5.7.1., 5.7.2., 15.6.
kümnendlogaritmi karakteristik 5.7.2.
— mantiss 5.7.2.
— moodul 5.7.1.
kümnendsüsteem 3.1.2.
Lagrange 16.1.12.
lahendite kadu 6.1.3., 6.3.3.
lahtine poolruum 9.1.5.
— poolsirge 9.1.3.
— pooltasand 9.1.4.
lahutamine 3.2.1.
Lebesgue 16.4.9.
Leibniz 2.4.8., 16.1.12., 16.4.9.
l'Hospital 16.1.12.
l'Hospitali reegel 4.4.3.
ligikaudse arvu standardkuju 5.2.4.
ligikaudsete arvude kirjutamise eeskirjad 5.2.4.
lihtmurd 3.5.1., 5.1.1.
liidetav 3.2.1.
liigitunnus 9.2.1.
liigmurd 3.5.1., 5.1.1.
liikumine 11.23.
liikumise aksioom 9.4.4.
liitfunktsioon 2.4.6.
liitfunktsiooni koostisosad 2.4.6.
— pidevus 4.6.2.
— tuletis 16.1.3.
liitmine 3.2.1.
liitmise assotsiatiivsus 3.2.2.
— kommutatiivsus 3.2.2.
— reegel kombinatoorikas 8.1.6.
lineaarfunktsioon 15.2.1.
lineaarne planeerimisülesanne 7.3.3.
— ruum 13.3.3.
lineaarvõrrand 6.2.
lineaarvõrrandisüsteem 6.12.
lineaarvõrratus 7.2.1.
Lobatševski 2.4.8., 9.5.
— geomeetria 9.5.
loenduv hulk 1.5.2.
logaritm 5.7.1.
logaritmfunktsioon 15.6.
logaritmfunktsiooni alus 15.6.
logaritmi alus 5.7.1.
logaritmiline diferentseerimine 16.1.9.
logaritmimine 5.7.1.
logaritmvõrrand 6.9.
lokaalne ekstreemum 16.2.2.
— ekstreemumkoht 16.2.2.
— ekstreemumpunkt 16.2.2.
— maksimum 16.2.2.
— miinimum 16.2.2.
loogiline ekvivalents 1.2.
— järeldus 1.2.
loomulik logaritm 5.7.1.
lubatav lahend 7.3.3.
— piirkond 7.3.3.
lõigu jagatis naturaalarvuga 10.3.3.
— keskpunkt 10.3.4.
— keskpunkti koordinaadid 14.1.1., 14.2.1., 14.3.1.
— keskristsirge 10.3.4.
— korrutis naturaalarvuga 10.3.3.
— pikkus 14.1.1., 14.2.1., 14.3.1.
lõik 3.6.4., 9.1.3., 10.3.
lõikude suhe 10.3.5.
— summa 10.3.3.
— vahe 10.3.3.
— võrdlemine 10.3.2.
— võrdsus 10.3.2.
lõikuvad sirged 10.2., 11.2.2.
— tasandid 11.3.2.
lõikuvate sirgete sidum 11.2.1.
— tasandite kimp 11.3.2.
lõplik hulk 1.5.2.
— murd 3.1.2.
lõpmatu hulk 1.5.2.
lõpmatult kahanev geomeetriline jada 5.9.3.
lõpmatu murd 3.1.2.
— piirväärtus 4.2.5.
lähend 5.2.1.
lähendi viga 5.2.2.
lähisnurgad 10.5.12., 10.5.13.
lüke 10.15.2., 11.23.
lükke valemid 10.15.2.
lükke vektor 10.15.2.
matemaatiline avaldis 5.5.1.
mediaan 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
meetrilised seosed kolmnurgas 10.7.5.
minut 10.5.2.
mitmetahuline nurk 11.15.2.
mitterange järjestus 2.1.5.
mittetäielik ruutvõrrand 6.3.2.
Monge 9.5.
monotoonne funktsioon 15.1.5.

— jada 4.1.2.
multiplikatiivne poolrühm 2.3.2.
murd 5.1.1.
murdjoon 10.6.1., 10.6.2.
murdlineaarne funktsioon 14.2.8.
murdude jagamise eeskirjad 5.1.2.
— korrutamise eeskirjad 5.1.2.
— lahutamise eeskirjad 5.1.2.
— liitmise eeskirjad 5.1.2.
murdvõrrand 6.6.
murdvõrratus 7.2.4.
murrujoon 5.1.1.
murru laiendamine 5.1.1.
— lugeja 5.1.1.
— nimetaja 5.1.1.
— põhiomadus 5.1.1.
— pöördväärtus 5.1.2.
— taandamine 5.1.1.
murruline astendaja 5.6.1., 5.6.3.
muutuja 2.4.1.
muutuja vahetus integraalis 16.3.4., 16.4.3.
muutuja väärtus 2.4.1.
muutumispiirkond 2.4.1., 2.4.2.
muutuv suurus 2.4.1.
mõõdud 18.
mõõtühikud 18.
määramata integraal 16.3.2.
määramatus 4.4.
määramispiirkond 2.4.2.
määratud integraal 16.4.1.
naturaalarv 3.3.1.
naturaalarvude jada 3.3.1.
naturaallogaritm 5.7.1., 15.6.
n-dimensionaalne vektorruum 13.3.3.
need ja ainult need 9.2.2.
negatiivne nurk 10.5.1., 10.5.3.
— täisarv 3.4.1.
neljanda astme võrrand 6.5.1.
Newton 4.7., 16.1.12., 16.4.9.
Newtoni binoomvalem 8.1.7.
Newton-Leibnizi valem 16.4.1.
nihe 10.15.2.
nimetaja 3.5.1.
nivoosirge 7.3.3.
n korda diferentseeruv 16.1.8.
n-nda astme polünoom 15.10.
n-nurk 10.6.2.
n-nurkne püramiid 11.13.2.
nullelement 2.3.3.
nullvektor 9.4.2., 13.1.2.
nurga haar 10.5.1.
— jagatis naturaalarvuga 10.5.4.
— korrutis naturaalarvuga 10.5.4.
nurgakraad 10.5.2.
nurga mõõtmine 10.5.1., 10.5.6., 10.5.7., 10.5.8., 10.5.9.
nurgapoolitaja 10.5.5.
nurgapoolitaja kolmnurgas 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
nurgaradiaan 10.5.2.
nurga sisepiirkond 10.5.1.
— tipp 10.5.1.
nurk 10.5.1., 12.3.1.
nurkade liigitamine 10.5.3.
— — suuna järgi 10.5.3.
— — suuruse järgi 10.5.3.
— — veerandite järgi 10.5.3.
— summa 10.5.4.
— vahe 10.5.4.
— võrdlemine 10.5.4.
— võrdsus 10.5.4.
nurk, mille tipp asub ringis 10.5.8.
— — — — väljaspool ringi 10.5.9.
nurk sirge ja tasandi vahel 11.4.4.
nõgus funktsioon 16.2.3.
nürinurk 10.5.3.
nürinurkne kolmnurk 10.7.2.
oktaeeder 11.16.4.
olemasolukvantor 1.2.
ordinaat 14.1.2., 14.1.3.
ordinaattelg 14.1.2.
orientatsioon 10.15.4.
originaal 1.6.1.
osahulk 1.3.2.
osamäär 5.3.2.
ositi integreerimine 16.3.4., 16.4.3.
paarisfunktsioon 15.1.1.
paaritu funktsioon 15.1.2.
parabool 9.5., 14.2.6.
parabooli fookus 14.2.6.
— haripunkt 14.2.6.
— juhtjoon 14.2.6.
— kanooniline võrrand 14.2.6.
— telg 14.2.6.
— võrrand 14.2.6.
parajasti siis 1.2., 9.2.2.
paralleelide aksioom 9.4.4., 9.5., 10.5.13.
paralleelprojektsioon 11.5.
paralleelsed sirged 11.2.2.
— — tasandil 10.2., 10.5.13.
— tasandid 11.3.2.
paralleelsete haaradega nurgad 10.5.14.
paralleelsuse tunnus 10.5.13.
parema käe reegel 13.1.8.
parempoolne pidevus 4.5.2.
— piirväärtus 4.2.2.
— ümbrus 3.6.5.
Pascal 8.1.1., 8.2.1., 9.5.
Pascali kolmnurk 8.1.5., 8.1.7.
peegelduskeskpunkt 10.15.4.
peegeldus punktist 10.15.4., 11.23.
— sirgest 10.15.4.
— tasandist 11.23.
peegeldustelg 10.15.4.
periood 15.1.3.
perioodiline funktsioon 15.1.3.
permutatsioonid 8.1.1., 8.1.4.
pidev funktsioon 4.5.1.
pidevuse aksioom 3.6.3.
piirdenurk 10.5.7.
piisav 1.2.
pindala aditiivsus 16.4.5.
— monotoonsus 16.4.5.
— omadused 16.4.5.
pinna võrrand 14.3.2.
planimeetria 10.1.
Platon 9.5.
polüeeder 11.7.1.
polünoom 5.5.7., 15.10.
polünoomi aste 5.5.7.
— nullkoht 5.5.7.
— vabaliige 5.5.7.
polünoomide jagamine 5.5.7.
poollõik 3.6.4.
poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid 12.9.
poolruum 9.1.5.
poolruumi äärtasand 9.1.5.
poolrühm 2.3.2.
poolsirge 3.6.4., 9.1.3.
pooltasand 9.1.4.
pooltasandi äärsirge 9.1.4.
positiivne nurk 10.5.1., 10.5.3.
— täisarv 3.4.1.
positsiooniline arvusüsteem 3.1.2.
prisma 11.9.
prismade liigitamine 11.9.2.
prisma pindala 11.9.3.
— ruumala 11.9.4.
projektiivne geomeetria 9.5.
projektsioonide teoreem kolmnurgas 10.7.6.
protsent 5.3.1., 5.3.2.
Ptolemaiose teoreem 10.13.4.
puhtimaginaararv 3.7.1.
puhtperioodiline murd 3.5.3.
punkt 9.1.2., 9.4.2., 9.4.3., 9.4.4.
punkti kaugus sirgest 14.2.4.
— — tasandist 14.3.3.
— koordinaadid 14.1.1., 14.1.2., 14.1.3.
— kohavektor 13.2.1., 13.2.2.
puutujahulknurk 10.6.4., 10.13.4.
põhiline elementaarfunktsioon 15.9.1.
põiknurgad 10.5.12., 10.5.13.
päripidine homoteetsus 10.15.6.
pärisosahulk 1.3.2.
pöördarv 5.1.2.
pöörde keskpunkt 10.15.3.
pöördelement 2.3.3., 2.3.5.
pöördenurk 10.15.3., 11.23.
pöördetelg 11.23.
pöörde valemid 10.15.3.
pöördfunktsioon 2.4.7.
pöördfunktsiooni pidevus 4.6.2.
— tuletis 16.1.4.
pöördkeha 11.7.2.
pöördkeha ruumala 16.4.7.
pöördkoonus 11.18.2.
pöördkujutus 1.6.3.
pöördlause 9.2.2.
pöördpinna pindala 16.4.8.
pöördsilinder 11.17.2.
pöördtehe 3.2.1.
pöördteoreem 9.2.2.
pöördvastandlause 9.2.2.
pöördvastandteoreem 9.2.2.
pöördvõrdeline sõltuvus 15.11.1.
pööre 10.15.3., 11.23.
pööre ümber punkti 10.15.3.
— — sirge 11.23.
püramiid 11.13.
püramiidi apoteem 11.13.2.
püramiidide liigitamine 11.13.2.
püramiidiline pind 11.15.1.
püramiidi ruumala 11.13.4., 11.13.5.
püsipunkt 10.15.1.
püstkoonus 11.18.2.
püstprisma 11.9.2.
püstsilinder 11.17.2.
Pythagoras 9.5.
Pythagorase teoreem 9.5., 10.7.13.
radiaalsümmeetrilised kujundid 10.4.2.
radiaan 10.5.2.
radiaanmõõt 10.5.2.
range järjestus 2.1.5.
— lokaalne ekstreemum 16.2.2.
rangelt kahanev funktsioon 15.1.5.
— — jada 4.1.2.
— kasvav funktsioon 15.1.5.
— — jada 4.1.2.

— monotoonne funktsioon 15.1.5.
— — jada 4.1.2.
ratsionaalarv 3.1.2., 3.5.1.
ratsionaalarvude tihedus 3.5.5.
ratsionaalne avaldis 5.5.1.
reaalarv 3.6.1.
reaalarvu absoluutväärtus 3.6.2.
— ümbrus 3.6.5.
reaalarvude hulga pidevus 3.6.3.
reaalosa 3.7.1.
reaaltelg 3.7.1.
reeper 14.1.2., 14.1.3.
refleksiivsus 2.1.3.
regulaarne hulktahukas 11.16.
relatiivne sagedus 8.2.3.
— viga 5.2.2., 16.1.7.
relatsioon 2.1.
riba 9.1.4.
— äärsirge 7.31., 9.1.4.
Riemann 16.4.9.
ring 2.3.4., 10.14.
ringi aksioomid 2.3.4.
— diameeter 10.14.
— pindala 10.14.4.
— raadius 10.14.
— ruutimine 9.5., 10.14.5.
— segment 10.14.3.
ringjoon 9.5., 10.13., 10.14.1., 14.2.5.
ringjoone diameeter 10.13.1.
— kaar 10.13.2.
— lõikaja 10.13.3.
— pikkus 10.13.5.
— puutuja 10.13.3., 14.2.5.
— raadius 10.13.1.
— sirgestamine 10.13.6.
— võrrand 14.2.5.
ringkoonus 11.18.2.
ringsilinder 11.17.2.
ristbaas 13.2.1., 13.2.2.
ristkülik 10.9.
ristprojektsioon 11.5.1.
risttahukas 11.11.
ristuvad sirged 10.5.13.
— vektorid 13.2.4.
ristuvate haaradega nurgad 10.5.15.
romb 10.10
rooma numbrid 3.1.3.
ruum 9.1.2., 9.4.2., 9.4.3.
ruumiline kujund 11.1.
ruuminurk 11.22.
ruumi teisendus 11.23.
ruut 10.11.
ruutfunktsioon 15.3.1., 15.10.1.
ruutjuur 5.6.3., 15.4.1.
ruutparabool 15.3.1.
ruutpolünoom 5.5.7., 15.10.1.
ruutvõrrand 6.3.
ruutvõrrandi diskriminant 6.3.1., 6.3.2.
— lahendite omadused 6.3.3.
— lahendivalem 6.3.1., 6.3.2.
ruutvõrratus 7.2.2.
rööpkülik 10.8.
rööpkülikureegel 13.1.1.
rööptahukas 11.10.
rühm 2.3.3.
samarihilised vektorid 13.1.6.
samaväärsed võrrandid 6.1.2.
— võrratused 7.1.4.
sarnased hulknurgad 10.6.3.
— üksliikmed 5.5.3.
sarnasustegur 10.15.6.
sarnasusteisendus 11.23.
Sarruse reegel 5.10.2.
segaarv 5.1.1.
segakorrutis 13.1.9., 13.2.6.
segaperioodiline murd 3.5.3.
segment keras 11.20.2.
— ringis 10.14.3.
sektor 10.14.2.
sektordiagramm 2.4.4.
sektor keras 11.20.4.
sekund 10.5.2.
seos 2.1.1.
— hulgas 2.1.3.
— hulkade vahel 2.1.1.
sfäär 11.21.1., 14.3.6.
sfääri diameeter 11.21.1.
— keskpunkt 14.3.6.
— puutujatasand 14.3.6.
— raadius 11.21.1., 14.3.6.
— segment 11.21.2.
— võrrand 14.3.6.
sihifunktsioon 7.3.3.
siinus 12.2.1., 12.3.2.
siinusfunktsioon 15.7.1.
siinusteoreem 10.7.6.
siis ja ainult siis 1.2., 9.2.2.
silinder, 11.17.2.
silindriline pind 11.17.1.
Simpsoni valem 16.4.4.
sirge 9.1.2., 9.1.3., 9.4.4., 11.2.1.
— algordinaat 14.2.3.
— ja tasandi lõikumine 11.4.4.
— — — paralleelsus 11.4.3., 14.3.5.
— — — ristumine 11.4.4.
— — — vaheline nurk 14.3.5.
— — — vastastikune asend 11.4.
— kanoonilised võrrandid 14.3.4.
— normaalvõrrand 14.2.3.
— parameetrilised võrrandid 14.3.4.
— projektsioon tasandil 11.4.4.
— sihivektor 14.3.4.
sirgete kimp 10.2.
sirge telglõigud 14.2.3.
sirgete lõikepunkt 14.2.4.
— paralleelsus 10.2., 10.5.13., 14.2.4.
— paralleelsuse tunnus 10.5.13., 14.2.4.
— ristseisu tunnus 14.2.4.
— vaheline nurk 14.2.4.
— vastastikused asendid ruumis 11.2.2.
sirge tõus 14.2.1., 14.2.3.
— tõusunurk 14.2.1.
— vektorvõrrand 14.2.3., 14.3.4.
— võrrand 14.3.4.
— üldvõrrand 14.2.3., 14.3.4.
sirgjoon vt. sirge
sirglõigu tõus 14.2.1.
— tõusunurk 14.2.1.
sirglõik 3.6.4., 9.1.3., 10.3.
sisalduvuse omadused 1.3.2.
SI-süsteem 18.1.
skalaar 13.1.1.
skalaarkorrutis 13.1.7., 13.2.4.
skalaarne suurus 13.1.1.
skalaarruut 13.1.7.
statsionaarne punkt 16.2.2.
stereomeetria 11.1.
steradiaan 11.22., 18.1.
struktuur 2.2.
Stuarti valem 10.7.5.
suhe 5.4.1.
suhte liikmed 5.4.1.
suhteline sagedus 8.2.3.
— viga 5.2.2.
summa 3.2.1.
— tuletis 16.1.2.
suunaga nurk 10.5.1.
suunakoosinused 13.2.1., 13.2.2.
suurim ühistegur 3.3.6., 5.5.4.
sõltumatu muutuja 2.4.2.
sõltuv muutuja 2.4.2.
sümmeetria 10.4., 11.23.
sümmeetriakeskpunkt 10.4.2., 11.23.
sümmeetria punkti suhtes 10.4.2., 11.23.
— sirge suhtes 10.4.1.
sümmeetriatasand 11.23.
sümmeetria tasandi suhtes 11.23.
sümmeetriatelg 10.4.1.
sümmeetriline seos 2.1.3.
sümmeetrilised kujundid punkti suhtes 10.4.2.
— — sirge suhtes 10.4.1.
— punktid punkti suhtes 10.4.2.
— — sirge suhtes 10.4.1.
— — tasandi suhtes 11.23.
sündmus 8.2.2.
sündmuse esinemise absoluutne sagedus 8.2.3.
— — sagedus 8.2.3.
— klassikaline tõenäosus 8.2.5.
— statistiline tõenäosus 8.2.4.
— tõenäosus 8.2.5.
sündmuste korrutis 8.2.2.
— summa 8.2.2.
— vahe 8.2.2.
— ühend 8.2.2.
— ühisosa 8.2.2.
taandamisvalemid 12.6.
taandatud polünoom 5.5.7.
— ruutvõrrand 6.3.2.
tabel 2.4.4.
tangens 12.2.1., 12.3.2.
tangensfunktsioon 15.7.3.
tangensteoreem 10.7.6.
tarvilik 1.2.
— ja piisav 1.2., 9.2.2.
tasand 9.1.2., 9.1.4., 9.4.4., 11.3.
tasandi kaldsirge 11.4.4.
tasandiline kujund 10.1.
tasandi kokkusurumine 10.15.7.
— normaal 11.4.4.
— normaalvektor 14.3.3.
— normaalvõrrand 14.3.3.
— riht 11.3.2.
— ristsirge 11.4.4.
— väljavenitamine 10.15.7.
tasandite kimp 11.3.2.
tasandi telglõigud 14.3.3.
tasandite paralleelsuse tunnus 14.3.3.
— ristseisu tunnus 14.3.3.
— sidum 11.3.1.
— vaheline nurk 14.3.3.
— vastastikused asendid 11.3.1., 11.3.2.
tasandi võrrand 14.3.3.
— üldvõrrand 14.3.3.

tasapind vt. tasand
tegur 3.2.1.
teguriteks lahutamine 5.5.9., 5.5.10.
tehe 2.3.1.
tehete järjekord 3.2.3.
tehted lõikudega 10.3.3.
— nurkadega 10.5.4.
teise astme võrratus 7.2.2.
teisendus ruumis 11.23.
teisendus tasandil 10.15.1.
teist järku determinant 5.10.1.
— — joon 14.2.9.
— — tuletis 16.1.8.
— liiki katkevuspunkti 4.5.3.
telgsümmeetrilised kujundid 10.4.1.
teljeline sümmeetria 10.4.1.
teoreem 9.2.2., 9.3.
teravnurk 10.5.3.
teravnurkne kolmnurk 10.7.2.
tetraeeder 11.16.2.
Thales 9.5.
Thalesi teoreem 13.1.7.
tihe arvuhulk 3.5.5.
tippnurgad 10.5.11.
transtsendentne võrrand 6.1.4.
transitiivsus 2.1.3.
trapets 10.12.
trapetsvalem 16.4.4.
trigonomeetria 12.1.
— põhivalemid 12.5.1.
trigonomeetriline funktsioon 15.7.
trigonomeetrilised põhivõrrandid 6.10.1., 6.10.2.
— võrrandid 6.10.
trigonomeetriliste funktsioonide avaldamine poolnurga tangensi kaudu 12.10.
— — korrutise teisendamise valemid 12.12.
— — summa teisendamine korrutiseks 12.11.
— — vahe teisendamine korrutiseks 12.11.
tsentraalsümmeetria 10.4.2.
tsentraalsümmeetrilised kujundid 10.4.2.
tuletatud mõiste 9.3.
tuletis 16.1.1.
tuletise geomeetriline tähendus 16.1.1.
tuletisfunktsioon 16.1.1.
tulpdiagramm 2.4.4.
tõkestatud funktsioon 15.1.4.
— jada 4.1.2.
tähtsamad jooned kolmnurgas 10.7.4., 10.7.5., 10.7.6.
— punktid kolmnurgas 10.7.4.
täiendusnurgad 12.2.3.
täiendusnurkade trigonomeetrilised funktsioonid 12.2.3.
täisarv 3.4.1.
täisarvulise planeerimise ülesanne 7.3.3.
täisnurkne kolmnurk 10.7.2., 10.7.13.
täisnurksete kolmnurkade lahendamine 10.7.13.
— — kongruentsus 10.7.13.
täispööre 10.5.2.
tühi hulk 1.3.2.
tüvenumber 5.2.4.
tüvikoonus 11.19.
tüvipüramiid 11.14.
universaalne hulk 1.3.1.
universaalsuskvantor 1.2.
vahepealne muutuja 2.4.6.
vahemik 3.6.4.
vahe tuletis 16.1.2.
variatsioonid 8.1.1., 8.1.3.
varunumber 5.2.4.
vasakpoolne pidevus 4.5.2.
— piirväärtus 4.2.2.
— ümbrus 3.6.5.
vastandarv 3.4.1.
vastandelement 2.3.3.
vastandlause 9.2.2.
vastandsündmus 8.2.2.
vastandteoreem 9.2.2.
vastandvektor 9.4.2., 13.1.2.
vastupidine homoteetsus 10.15.6.
vea ülemmäär 5.2.2.
vektor 9.4.2., 9.4.3., 13.1.2.
vektoralgebra 13.3.2.
vektorbaas 13.2.1., 13.2.2.
vektoriaalne suurus 13.1.1.
vektori alguspunkt 13.1.2.
— komponendid 13.1.6.
— koordinaadid 13.2.1., 13.2.2.
— korrutamine arvuga 13.1.5., 13.2.3.
— lõpp-punkt 13.1.2.
— pikkus 13.1.2.
— rakenduspunkt 13.1.2.
— suunakoosinused 13.2.1., 13.2.2.
vektorite kollineaarsus 13.2.3.
— komplanaarsus 13.2.6.
— lineaaralgebra 13.3.2.
— ristseisu tunnus 13.2.4.
— skalaarkorrutis 13.1.7., 13.2.4.
— summa 13.1.3., 13.2.3.
— vahe 13.1.4., 13.2.3.
vektorkorrutis 13.1.8., 13.2.5.
vektorruum 13.3.3.
Viete'i teoreem 6.3.3.
võimatu sündmus 8.2.2.
võrde liikmed 5.4.1.
võrdeline jaotamine 5.4.3.
— sõltuvus 15.2.2.
võrdelised lõigud 10.3.5., 10.5.16.
võrde põhiomadus 5.4.2.
— siseliikmed 5.4.1.
— tegur 15.2.2.
— välisliikmed 5.4.1.
võrdhaarne kolmnurk 10.7.2., 10.7.11.
võrdkülgne kolmnurk 10.7.2., 10.7.12.
võrdus 1.1.
võrdvõimsad hulgad 1.5.2.
võrrand 6.1.1.
võrrandi graafiline lahendamine 6.11.1.
— järeldus 6.1.3.
— lahend 6.1.1., 6.1.3.
— lahendamine 6.1.3.
— lahendite kadu 6.1.3., 6.3.3.
— ligikaudne lahendamine 6.11.
— *n*-kordne lahend 6.5.2.
— omadused 6.1.2.
— pealiige 6.1.4.
— vabaliige 6.1.4.
võrrandite liigitamine 6.1.4.
võrrandisüsteemi graafiline lahendamine 6.13.
võrratus 7.1.1.
võrratuse lahend 7.1.3.
— lahendihulk 7.1.3.
võrratusesüsteemi lahendihulk 7.1.3.
võrre 5.4.1.
võõrlahend 6.1.3.
vähendaja 3.2.1.
vähendatav 3.2.1.
vähim ühiskordne 3.3.7., 5.5.4.
väide 9.2.2.
välistavad sündmused 8.2.2.
Weierstrass 3.8.
Weierstrassi teoreem 4.6.2.
Weyl 9.4.1., 9.4.2., 9.4.3.
vöö 11.20.3., 11.21.3.
äärsirge 7.3.1., 9.1.4.
äärtasand 9.1.5.
ühendid 8.1.1.
ühenimelised murrud 5.1.1.
ühepoolne pidevus 4.5.2.
— piirväärtus 4.2.2.
ühikelement 2.3.3.
ühikvektor 13.1.2.
ühiskordne 3.3.7.
ühistegur 3.3.6.
ühistegurita arvud 3.3.6.
üksliige 5.5.2., 5.5.3.
üksliikme kordaja 5.5.2.
— märk 5.5.2.
üksühene kujutus 1.6.3.
— vastavus 1.5.1.
ülalt tõkestatud hulk 3.6.3.
üldisuskvantor 1.2.
ülemine raja 3.6.3.
— tõke 3.6.3.
ülinürinurk 10.5.3.
ümardatud arv 5.2.1.

Эндель Иоханнесович Юримяэ, Калле Рудольфович Вельскер
Справочник по математике для средней школы
На эстонском языке
Художник-оформитель И. Пяэзуке
Таллин, «Валгус»
Toimetajad E. Jõgi ja R. Sepp
Kunstiline toimetaja Ü. Meister
Tehniline toimetaja M. Pall
Korrektorid E. Martoja ja S. Uustare

ИБ № 823.

Laduda antud 04. 06. 79
Trükkida antud 26. 03. 80
Formaat 84×108/32
Trükipaber nr. 1
Kiri: literaturnaja
Kõrgtrükk
Tingtrükipoognaid 23,10
Arvestuspoognaid 19,18
Trükiarv 40 000
Tellimuse nr. 2279
Hind 85 kop.

Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10
H. Heidemanni nim. trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19. II